1. Zbiory otwarte, domknięte, zwarte

(*w niniejszym dokumencie granica przedziału otwartego jest oznaczana nawiasem okrągłym, a domkniętego – kwadratowym*)

1.1. Zbadać otwartość, domkniętość, ograniczoność i zwartość podanych zbiorów:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^5 + y^4 + x^3 + y^2 + x < 0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^5 + y^4 + x^3 + y^2 + x \leqslant 0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy \geqslant 0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad xy \leqslant 0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x^2 + y^2 - 25| < 24\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(f) $F = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$
(g) $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(h) $H = (0,1)$ na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$
(i) $I = (0,1) \times \{0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$
(j) $J = [0,1]$ na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$
(k) $K = [0,1] \times \{0\}$ na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$

2. Ciągłość i różniczkowalność funkcji, pochodne cząstkowe i kierunkowe

2.1. Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y)$ w punkcie $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3 + \sqrt{x^2+y^2}x^2 + yx^2}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ 0 & \text{w } (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ 0 & \text{w } (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} y \sin\frac{1}{x} & \text{poza } (0,0) \\ y & \text{w } (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 = y \neq 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} x & x^2 = y \neq 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

2.2. Zbadać ciagłość i różniczkowalność funkcji $f(x,y)$ w punkcie $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y^3}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ y & \text{w } (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ y & \text{w } (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{poza } (0,0) \\ y & \text{w } (0,0) \end{cases}$

2.3. Niech $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{poza } (0,0) \\ y & \text{w } (0,0) \end{cases}$. Pokazać, że $f(x,y)$

(a) jest ciągła w $(0,0)$,
(b) ma nieciągłe pochodne cząstkowe w $(0,0)$ (w szczególności obliczyć je w tym punkcie),
(c) jest różniczkowalna w $(0,0)$.

2.4. Niech $f(x,y) = \cos\left[x + \sqrt{\pi}y + e^{x+\sqrt{\pi}y+\sin(x+\sqrt{\pi}y)}\right]$. Znaleźć pochodną kierunkową $D_{(\sqrt{\pi},-1)}f(x,y)$.

2.5. Obliczyć pochodne mieszane drugiego rzędu funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+xy^3}{x^2+y^2} & \text{poza } (0,0) \\ 0 & \text{w } (0,0) \end{cases}$ w punkcie $(0,0)$ i zauważyć, że są różne.

3. Zamiana współrzędnych, pochodna funkcji złożonej, operatory różniczkowe

3.1. Dany jest operator

$$\mathcal{L} = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 1$$

i funkcja

$$g(x,y) = \frac{x^2}{y}e^{y/x}\ln\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}\right) .$$

Obliczyć $\mathcal{L}g$.
(*wskazówka: znaleźć postać określonego we współrzędnych biegunowych operatora* $\mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ *we współrzędnych kartezjańskich* $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$)

3.2. Wyrazić operator $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ we współrzędnych $\begin{cases} u = \cos(x+y) \\ v = \sin(x-y) \end{cases}$. Jaka jest ogólna postać funkcji f spełniającej $\mathcal{L}f = 0$?

3.3. Obliczyć komutator $[\mathcal{L},\mathcal{K}] \equiv \mathcal{L}\mathcal{K} - \mathcal{K}\mathcal{L}$ operatorów

$$\mathcal{L} = u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} , \qquad \mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} ,$$

gdzie $\begin{cases} u = e^x\cos y \\ v = e^x\sin y \end{cases}$, i wyrazić go we współrzędnych (x,y).

4. Ekstrema na zbiorach zwartych

4.1. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x,y)$ na zbiorze $K \subset \mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2e^{x-y}$, $\quad K = \{(x,y) : \quad x^2+y^2 \leqslant 3\}$
(*wskazówka:* $\sqrt{6} \approx 2,45$, $\ln\frac{3}{2} \approx 0,41$)

(b) $f(x,y) = \sqrt{xy^3}$, $\quad K = \{(x,y) : \quad x,y \geqslant 0, \quad x+y \leqslant 1\}$

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad K = \{(x,y) : \quad x^2+y^2 \leqslant 1\}$

4.2. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg jednostkowy wskazać ten o największym obwodzie.

4.3. (*ciekawsze*) Gęstość ρ_{μ,σ^2} rozkładu Gaussa o parametrach μ i σ^2 jest dana wzorem

$$\rho_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Dla danej próbki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ znaleźć najlepsze estymatory empiryczne wielkości μ i σ^2, tj. takie ich wartości, które maksymalizują funkcję

$$f(\mu,\sigma^2|\{x_i\}_{i=1}^n) \equiv \prod_{i=1}^n \rho_{\mu,\sigma^2}(x_i) .$$

Założyć, że

$$(\mu,\sigma^2) \in [-R,R] \times [0,S^2] ,$$
$$R \gg |x_{\max}| ,$$
$$R \gg S \gg |x_{\max} - x_{\min}| ,$$
$$x_{\max} \neq x_{\min} ,$$

gdzie $x_{\max}$ i $x_{\min}$ to, odpowiednio, największy i najmniejszy element zbioru $\{x_i\}_{i=1}^n$.

5. Punkty krytyczne

5.1. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x,y)$:

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy^3 + 2y^4$

(b) $f(x,y) = x^2 - x^3y + y$

(c) $f(x,y) = \sin x \cos y$

5.2. Niech $f(x,y) = -v^2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2$. W zależności od znaku v znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji f. Porównać wyniki z wykresem funkcji.
(*ciekawostka: taki kształt ma potencjał pola Higgsa*)

5.3. Niech $f(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin x + 1 - \cos y$. Dla jakich wartości parametru a punkt $(0,0)$ jest ekstremum lokalnym funkcji f?

6. Punkty krytyczne funkcji uwikłanej

6.1. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $z(x,y)$ zadanej w sposób uwikłany równaniem:

(a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 10yz + 5 = 0$

(b) $\frac{x^2z+y}{y^2+1} + 4z^3 = 0$

(c) $\frac{x^2+y^2}{2}z^3 + xyz^2 + z = 2$

6.2. Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,u,v) = (x^2+u+v^2-12\,,\ x^3+u^2+v^3-32)$. Równanie $F(x,u,v) = (0,0)$ zadaje u i v jako funkcje zmiennej x. Obliczyć $u'(x)$ i $v'(x)$ w punkcie $(x,u,v) = (1,2,3)$.

7. Punkty krytyczne warunkowe, mnożniki Lagrange'a

7.1. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x,y,z)$ na powierzchni określonej równaniem $F(x,y,z) = 0$:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z,\qquad F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

(b) $f(x,y,z) = x + y + z,\qquad F(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$

(c) $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2,\qquad F(x,y,z) = x + y + z - 1\qquad$ dla $\quad a,b,c > 0$

(d) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3,\qquad F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$

7.2. Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x,y,z,t) = x + y - zt$ na zbiorze

$$K = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \ \wedge\ x + y = z\}\ .$$