Zadania domowe z Analizy II
Seria 2.

1. Znajdź ogólne rozwiązania równań różniczkowych metodą rozdzielania zmiennych:

   (a) $(y - x^2y)y' = -(xy^2 + x)$,

   (b) $xyy' = 1 - x^2$,

   (c) $y' \operatorname{tg} x - y = a$, $a \in \mathbb{R}$,

   (d) $y' = 10^{x+y}$,

   (e) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$,

   (f) $e^{-s}\left(1 + \dfrac{ds}{dt}\right) = 1$,

   (g) $1 - y(y')^2 = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

2. Znajdź ogólne rozwiązania równań różniczkowych jednorodnych:

   (a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$,

   (b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$,

   (c) $xy' - y = yy'$,

   (d) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$,

   (e) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$,

   (f) $xy' = y \log \dfrac{y}{x}$,

3. Znajdź ogólne rozwiązania równań różniczkowych liniowych:

   (a) $y' + 2y = 4x$,

   (b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,

   (c) $y' + y \arccos x = e^{\sqrt{1-x^2} - x \arccos x}$,

   (d) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,

   (e) $y' + y = \cos x$,

   (f) $y' + ay = e^{mx}$, $a, m \in \mathbb{R}$,

   (g) $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sin x}$,

   (h) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$.

4. Wyznacz rozwiązania równań Bernoulliego:

   (a) $y' + 2xy = 2x^3y^3$,

   (b) $y' + \dfrac{y}{x+1} = y^2$,

   (c) $y' = xy + x^3\sqrt[3]{y}$,

   (d) $xy' + y = y^2 \log x$,

   (e) $y' + y^2 \cos x = y \operatorname{tg} x$,

   (f) $xy' - x^2\sqrt{y} = 4y$.

5. Znajdź ogólne rozwiązania równań różniczkowych:

(a) $x + y + 1 = (2x + 2y - 1)y'$,

(b) $xy' + 1 = e^y$,

(c) $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x+1)}$,

(d) $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x}}(1-4x) = y^2 + 4x - \sqrt{x} - 2$,

(e) $y(y+1) = x(x + y')$,

(f) $y'(x^2+1)^2 \operatorname{arc\,tg} x = 1 - y - x^2(y+1)$.

6. Rozwiąż równania różniczkowe drugiego rzędu po dokonaniu (odpowiedniego) podstawienia (np. $u = yy'$, $(y')^2$, xy', $\frac{y'}{y}$ itp.):

   (a) $yy'' + (y')^2 = x$,

   (b) $yy'' = (y')^2$,

   (c) $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 0$,

   (d) $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$,

   (e) $x^2yy'' = (xy' - y)^2$,

   (f) $yy'' = y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right)$.

7. Rozwiąż równania różniczkowe trzeciego rzędu:

   (a) $y''' = \dfrac{1}{x}$,

   (b) $x^2y''' = (y'')^2$,

   (c) $y''' = (y'')^3$,

   (d) $y'y''' = 3(y'')^2$.

8. Wyznacz ogólne rozwiązania równań różniczkowych na podstawie znajomości rozwiązania szczególnego y_1.

   (a) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ dla $y_1(x) = x$,

   (b) $y'' + \dfrac{2y'}{x} + y = 0$ dla $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

9. Wykorzystując znaną postać rozwiązania szczególnego y_1 równania różniczkowego, znajdź rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowe.

   $$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0 \text{ dla } y_1(x) = e^x,\ (y, y')(1) = (0, 1)$$

10. Wyznacz ogólne rozwiązanie równania różniczkowego $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, zauważając, że równanie to ma rozwiązanie szczególne w postaci pewnego wielomianu stopnia 3.

11. Rozwiąż równania różniczkowe (względnie zagadnienia początkowe) drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$,
(b) $y'' + 9y = 0$,
(c) $y'' - 4y' = 0$,
(d) $y'' - 2y' + 5y = 0$,
(e) $3y'' - 2y' - 8y = 0$,
(f) $4y'' - 20y' + 25y = 0$,

(g) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $(y, y')(0) = (6, 10)$,
(h) $y'' + 4y' + 29y = 0$, $(y, y')(0) = (0, 15)$,
(i) $4y'' + 4y' + y = 0$, $(y, y')(0) = (2, 0)$.

12. Znajdź rozwiązanie ogólne równania:

(a) $2y'' + y' - y = 2e^x$,
(b) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$,
(c) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$,
(d) $y'' - 2y' + 2y = 2x$,
(e) $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$,
(f) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

13. Znajdź rozwiązanie ogólne równania $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ z niejednorodnością

(a) $f(x) = 10e^x$,
(b) $f(x) = 3e^{2x}$,
(c) $f(x) = 2\sin x$,
(d) $f(x) = 2x^2 - 30$,
(e) $f(x) = 2e^x \cos \dfrac{x}{2}$,
(f) $f(x) = x - e^{-2x} + 1$,
(g) $f(x) = e^x(3 - 4x)$,
(h) $f(x) = 3x + 5\sin(2x)$,
(i) $f(x) = 2e^x - e^{-2x}$,

14. Rozwiąż układy równań różniczkowych:

(a) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$,

(f) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$,

(g) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$,

(h) $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 6y + 4z \\ \dot{y} = -12x - 7y - 5z \\ \dot{z} = -8x - 5y - 3z \end{cases}$,

(i) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$,

(j) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$,

(k) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin t \\ \dot{y} = x + y + \cos t \end{cases}$,

15. Obliczyć całkę $\iint_K f\,ds$, gdzie

(a) $f(x,y) = \sin(x+y)$, $K = \{(x,y) : 2x + 3y \leqslant 1,\ x, y \geqslant 0\}$

(b) $f(x,y) = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $K = [0,1] \times [0,1]$

(c) $f(x,y) = (x + \sqrt{y})^2$, $K = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}$

(d) $f(x,y) = \frac{\sin(x)}{y^3}$, $K = \left\{(x,y) : \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6},\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \sin(x)\right\}$

(e) $f(x,y) = xe^{-y^2}$, $K = \{|x-y| \leqslant 1,\, y \geqslant 0\}$

(f) $f(x,y) = x^2 y$, $K = \{xy \geqslant 1,\, y^2 \geqslant x,\, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

16. Przestawić kolejność całkowania w całce

(a) $\int_0^{\pi} dx \int_{-\sin(x)}^{\sin(x)} f\,dy$ (b) $\int_0^{2} dx \int_x^{2x} f\,dy$ (c) $\int_0^{1} dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\,dy$