Analiza Matematyczna
Praca domowa

J. de Lucas

Zadanie 1. Pokazać, że dla wszystkich n naturalnych

$$\int_{(0,1)^n} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(e^k - 1).$$

Zadanie 2. Obliczyć

$$\int_{(0,1)^n} (x_1 + \ldots + x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

dla dowolnego n.

Zadanie 3. Obliczyć

$$\int_{(0,1)^n} (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

na n-wymiarowej kostce $(0,1)^n$.

Zadanie 4. Obliczyć

$$\int\int_D f(x,y) dxdy,$$

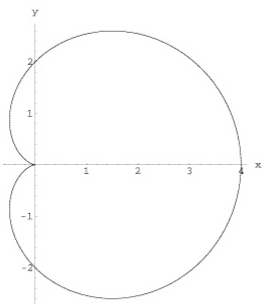
gdzie:

1. $f(x,y) = y + 1$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9, x \geqslant 0, y \geqslant \sqrt{3}x\}$.
2. $f(x,y) = 2y + 1$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x \leqslant 0, y \geqslant 0\}$.
3. $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$.
4. $f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{y^2} + 1$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \leqslant 0\}$.
5. $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 6x, y \leqslant 0\}$.

Zadanie 5. Obliczyć

$$\int\int_P r^2 \sin\theta dr d\theta$$

po zbiorze P ograniczone kardioidą o równaniu biegunowym $r(\theta) = 2(1 + \cos\theta)$, gdzie $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



Zadanie 6. Oblicz
$$\int\int_D \frac{dA}{y+x},$$
gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 4, x \geqslant 2, y \leqslant 0\}$.

Zadanie 7. Obliczyć $\int\int_D \sin(x + y)dxdy$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem zawartym między prostymi $y = 0$, $y = x$ i $y + x = \pi/2$.

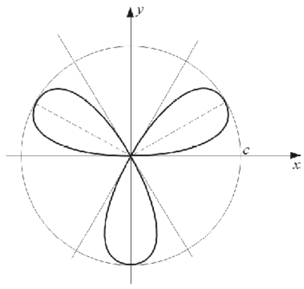
Zadanie 8. Oblicz
$$\int\int_R (x^2 + y^2)dxdydz$$
gdzie $R = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

Zadanie 9. Oblicz
$$\int\int_R xydxdydz$$
gdzie $R = \{(x, y, z) : 0 \leqslant z \leqslant 9 - x^2 - y^2, x, y \geqslant 0, y \leqslant x\}$.

Zadanie 10. Obliczyć miarę zbioru
$$A = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 2x, z > 0; x + y + z < 1 < 2x + y + z\}.$$

Zadanie 11. Oblicz objętość bryły
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z^2, 2 \leqslant z < 3\}.$$

Zadanie 12. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej rozetą trójlistną o równaniu biegunowym $r(\theta) = a \sin(3\theta)$, gdzie $a > 0$.



Zadanie 13. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej linią o równaniu uwikłanym $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$, gdzie $a > 0$.

(R:$\frac{3}{4}\pi a^2$).

Zadanie 14. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej linią o równaniu uwikłanym $(x^2+y^2)^2 = 2y^3$.

(R:$\frac{5}{8}\pi$).

Zadanie 15. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej linią o równaniu uwikłanym $(x^2+y^2)^2 = 2x^3$.

(R:$\frac{5}{8}\pi$).

Zadanie 16. Cisoida $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, gdzie $a \neq 0$, dzieli zbiór ograniczony krzywą $x^2 + y^2 = ax$ na trzy części. Obliczyć ich pola.

Zadanie 17. Oblicz pole tego obszaru ograniczonego krzywą $y = x^3$ i parabolą $y = -x^2 + 2x$, który znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych.

(R:$\frac{5}{12}$).

Zadanie 18. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ pomiędzy $x = 0$ oraz $x = \pi/2$.

Zadanie 19. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = x + 1$, $y = 2^{-x}$ i $y = 8$.

Zadanie 20. Oblicz objętość bryły między sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, walcem $\rho = \cos(2\theta)$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Zadanie 21. Oblicz objętość bryły Ω między sferą $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, gdzie $a > 0$, i stożkiem $z^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha(x^2 + y^2)$, gdzie $0 < \alpha < \pi/2$, i $z \geqslant 0$.

Zadanie 22. Oblicz pole ograniczone krzywymi $z = x^2 + y$, $z = 0$, $xy = 4$ oraz $x + y = 5$.

(R:$\frac{53}{4}$).

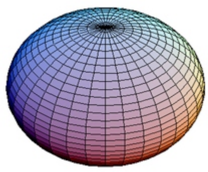
Zadanie 23. Oblicz całkę podwójną z funkcji $f(x, y) = xy^2$ po obszarze

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0\}.$$

(R:$\frac{64}{15}$).

Zadanie 24. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

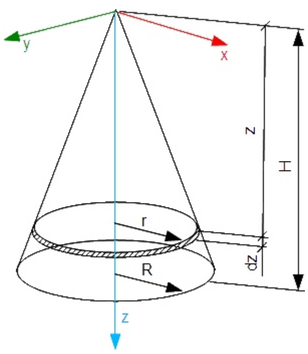


(R:$\frac{4}{3}abc\pi$).

Zadanie 25. Wyznaczyć położenie środka ciężkości figury płaskiej ograniczonej parabolą $y = kx^2$ oraz prostymi $x = b$, $y = 0$.

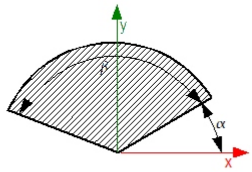
(R:$x_{sc} = 3b/4, y_{sc} = 3kb^2/5$).

Zadanie 26. Znaleźć położenie środka ciężkości jednorodnego stożka kołowego o wysokości H, gęstość ρ i promieniu podstawy R.

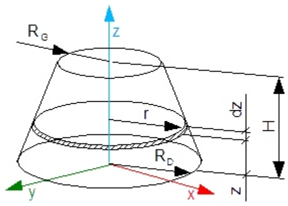


(R:$x_{sc} = 0, y_{sc} = 0, z_{sc} = H/4$)

Zadanie 27. Wyznaczyć środek ciężkości wycinka okręgu o promieniu R, gęstość ρ, kącie β i kącie położenia α.



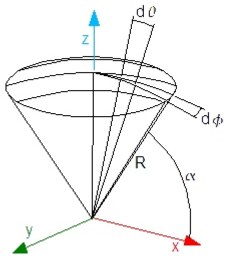
Zadanie 28. Wyznaczyć środek ciężkości stożka ściętego



gęstości ρ.

$$z_{sc} = \frac{1}{4} H \frac{R_D^2 + 2R_D R_G + 3R_G^2}{R_D^2 + R_D R_G + R_G^2}.$$

Zadanie 29. Wyznaczyć środek ciężkości wycinka kuli.

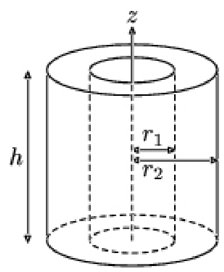


gęstości ρ.

$$z_{sc} = \frac{3R\cos^2\alpha}{8(1-\sin\alpha)}.$$

Zadanie 30. Oblicz momenty bezwładności następujących brył

- Cylindryczna rura o wewnętrznym promieniu r_1, zewnętrznym promieniu r_2, długości h i gęstości ρ.



- Wypełniona kula o promieniu r, gęstości ρ i masie m

(R=$\frac{2}{5}mr^2$).

Zadanie 31. Oblicz moment bezwładności względem osi OX jednorodnego trójkąta o masie m i wierzchołkach w punktach: $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (a,0)$ i $p_3 = (a,a)$

(R:$\frac{ma^2}{6}$).

Zadanie 32. Oblicz
$$\int\int\int_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$
po obszarze V ograniczonym powierzchnią o równaniu $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3$

(R:$\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}$)

Zadanie 33. Obliczyć
$$\int\int\int \frac{z}{x^2 + y^2}dxdydz$$
po obszarze V zawartym w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,\infty)$ ograniczonym powierzchniami $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x^2-y^2-z^2 = 0$, położonym na zewnątrz walca $x^2 + y^2 = 1/4$.

Zadanie 34. Oblicz objętości i masy podanych brył:

- $R = \{(x,y,z) : \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x \geqslant 0, y \geqslant x\}$ i gęstość $\rho(x,y,z) = x + y$.
- R stworzono poprzez wycięcie stożka $z^2 = x^2 + y^2$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i gęstość $\rho(x,y,z) = z$.
- R stworzono przez wycięcie górnej połowy stożka z górnej półkuli o promieniu 1, stożek był nachylony względem płaszczyzny OXY pod kątem 30° i gęstość $\rho(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.