25-03-2009

Seria 4 zadań z Analizy II

Zadanie 1.
Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

$$
\begin{aligned}
&a)\quad f(x,y) = x^2 + (y-1)^2\\
&b)\quad f(x,y) = 3x^2y - 6xy + y^3\\
&c)\quad f(x,y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}\\
&d)\quad f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y
\end{aligned}
$$

Zadanie 2.
a)
Znaleźć największą wartość iloczynu

$$u = xyzt$$

nieujemnych liczb x, y, z, t, ktorych suma ma stala wartosc

$$x + y + z + t = 4c$$

b)
Znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$u = x + y + z + t$$

dodatnich liczb x, y, z, t, których iloczyn ma stałą wartość

$$xyzt = c^4$$

Zadanie 3.
Znaleźć największą wartość funkcji

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

w trójkącie ograniczonym osią x, osią y i prostą $x + y = 2\pi$

Zadanie 4.
Obliczyć pochodną w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, -3)$ odwzorowania uwikłanego F, określonego przez równanie $H(x, y, z) = 0$

$$H : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \longrightarrow \Big(xyz - \operatorname{arc\,tg}(1 + x + z) + 6\Big) \in \mathbf{R}$$
$$F : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \longrightarrow z(x, y) \in \mathbf{R}$$

Zadanie 5.
Znajdź ekstremum uwikłanej funkcji $y(x)$, określonej równaniem

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 3axy = 0, \qquad a = const$$

Zadanie 6.
Niech równanie

$$y = x\phi(z) + \psi(z)$$

określa zmienną z jako funcję uwikłaną x i y i przy tym niech $x\phi'(z) + \psi'(z) \neq 0$.
Sprawdź, że funkcja ta spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Zadanie 7.
Wprowadźmy układ współrzędnych taki, że $a = x + y + z$, $b = xyz$, $c = z^3$.
Traktując c jako nową zmienną zależną c(a,b) zapisać w nowych zmiennych i rozwiązać równanie:

$$(3z^2 - 1)(x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}) + \frac{xy}{z}(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}) = x - y$$