

Zadania domowe z Algebry II R, seria 1
1 kwietnia 2019

Zadanie 1. Udowodnić, że jeśli $F \in \text{End}(V)$ jest odwracalny i $u \in V$, $\varphi \in V^*$ są takie, że liczba $\delta = 1 + \langle \varphi, F(u) \rangle$ jest różna od zera, to operator $F + u \otimes \varphi$ jest odwracalny. Uwaga: $(u \otimes \varphi)(v) = \langle \varphi, v \rangle u$.

Zadanie 2. Operator $F \in \text{End}(V)$ i forma dwuliniowa $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ spełniają warunek

$$\forall v, w \in V \quad b(F(v), w) = b(v, F(w))$$

Ponadto wiadomo, że operator F jest cykliczny, tzn istnieje $v \in V$ takie, że

$$V = \langle v, F(v), F^2(v), \dots, F^{n-1}(v) \rangle,$$

gdzie $n = \dim V$. Udowodnić, że forma b jest symetryczna.

Zadanie 3. Niech $V = \mathbb{R}^n$. Dla ustalonej macierzy $A \in V$ definiujemy kowektor $\varphi_A \in V^*$ wzorem

$$\langle \varphi_A, X \rangle = \text{tr}(AX).$$

Udowodnić, że odwzorowanie $V \ni A \mapsto \varphi_A \in V^*$ jest liniowym izomorfizmem. Wykazać także, że jeśli $\psi \in V^*$ spełnia warunek

$$\forall A, B \in V \quad \langle \psi, AB \rangle = \langle \psi, BA \rangle,$$

to ψ jest proporcjonalne do śladu, tzn. istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ taka, że $\langle \psi, A \rangle = \alpha \text{tr}(A)$.

Zadanie 4. Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$. W V^* rozważamy bazę $f = (\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$, gdzie $\langle \varphi_a, v \rangle = v(a)$. Znaleźć macierz F^* w bazie f jeśli (a) $F(v)(t) = v(t+1)$, (b) $F(v)(t) = v'(t)$.

Zadanie 5. Dowolnie wybraną metodą znaleźć sygnaturę formy kwadratowej

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(c) $V = \mathbb{R}^4$, $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

Zadanie 6. Niech $\varphi, \psi \in V^*$ oraz niech $\varphi \neq 0$. Wykazać, że jeśli $\ker \varphi \subset \ker \psi$, to istnieje $c \in \mathbb{K}$ takie, że $\varphi = c\psi$.

Zadanie 7. Wykazać, że $\mathbb{R}^4$ jest sumą prostą $\ker S$ i $\text{im} S$. Znaleźć macierz rzutu na $\text{im} S$ wzdłuż $\ker S$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. Zbadać czy istnieje trójka kowektorów $f^1, f^2, f^3 \in (\mathbb{R}^3)^*$, spełniająca warunek

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad f^1(\mathbf{x})f^2(\mathbf{x}) - (f^3(\mathbf{x}))^2 = x^1x^2 + x^2x^3 + x^1x^3.$$

Jeśli takie formy istnieją, sprawdzić, czy ich wybór jest jednoznaczny.

Zadanie 9. Niech $V = \mathbb{R}_3[\cdot]$. Określmy $\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4 \in V^*$ wzorami

$$\langle \phi^1, v \rangle = v(1), \quad \langle \phi^2, v \rangle = v(2), \quad \langle \phi^3, v \rangle = v(0), \quad \langle \phi^4, v \rangle = v'(0)$$

Znaleźć bazę $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ dualną do bazy $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$. Znaleźć rozkład $w \in V$ w bazie f , jeśli $w(t) = t^3$. Znaleźć rozkład ψ w bazie ϕ , jeśli $\langle \psi, v \rangle = v(-1)$. Przedstawić $D^*(\phi^4)$ jako kombinację liniową elementów bazy ϕ jeśli D jest różniczkowaniem, tzn $(Dv)(t) = v'(t)$.

Zadanie 10. Co można powiedzieć o sygnaturze formy kwadratowej na $\mathbb{R}^3$ jeśli $D_1 = D_2 = 0$ i $D_3 \neq 0$ w oznaczeniach z twierdzenia Sylwestera-Jacobiego (o wyznaczaniu sygnatury metodą wyznacznikową)? Odpowiedź uzasadnić.