

Zadania domowe z Algebry II R, seria 2
8 maja 2019

Zadanie 1. Niech

$$T(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + (x^1 - x^2 - x^3) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne tak określonego operatora $T \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$. Czy przestrzeń $V = \mathbb{R}^3$ ma bazę złożoną z wektorów własnych operatora T ? Jeżeli tak, to podać przykład takiej bazy.

Zadanie 2. Zbadać, dla jakich wartości $t \in \mathbb{C}$ macierz B można wyrazić jako wielomian od macierzy A ,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3-5t \\ t & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Na przestrzeni $V := \mathbb{R}_3[\cdot]$ określmy operator $F \in \text{End}(V)$ wzorem

$$(Fv)(t) := v(7) + (t-7)\dot{v}(7) + \frac{(t-7)^2}{2}\ddot{v}(7),$$

$v \in V$. Znaleźć wartości i przestrzenie własne oraz wielomian charakterystyczny F . Uogólnić na przypadek operatora $(Fv)(t) := \sum_{k=1}^r \frac{(t-t_0)^k}{k!} v^{(k)}(t_0)$ w przestrzeni $V = \mathbb{K}_n[\cdot]$, $n \geq r$.

Zadanie 4. Znaleźć wartości własne i wektory własne danych macierzy. W każdym przypadku zbadać, czy daną macierz można przedstawić w postaci SDS^{-1} , gdzie D jest macierzą diagonalną.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Znaleźć rozkład spektralny macierzy $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Obliczyć iloczyn macierzy $(I + A) \left(I + \frac{1}{2}A\right) \left(I + \frac{1}{3}A\right) \cdots \left(I + \frac{1}{50}A\right)$, jeśli $A := \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, I jest macierzą jednostkową.

Zadanie 7. Obliczyć $\phi(A)$, jeśli $A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, zaś $\phi(\lambda) := \prod_{n=1}^{25} \left(\frac{25}{n}\lambda - 1\right)$.

Zadanie 8. Obliczyć

$$\exp\left(t \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right), \quad \exp\left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right).$$

Zadanie 9. Obliczyć A^n dla $n \in \mathbb{N}$, jeśli: **(a)** $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; **(b)** $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; **(c)** $A := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, $\sin \alpha \neq 0$; **(d)** $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; **(e)** $A := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$; **(f)** $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;
(g) $A := \begin{bmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & -8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; **(h)** $A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10. W tym zadaniu używamy następujących oznaczeń:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z.$$

Obliczyć wartość

$$\exp(t\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$$

na wektorze $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dla $\vec{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$.