

Zadania domowe z Algebry II R, seria 3
5 czerwca 2019

Zadanie 1. Załóżmy, że wektory e_1, e_2, e_3, e_4 tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V . Sprawdzić, że $v_1 \perp v_2$ oraz dopełnić parę v_1, v_2 do bazy ortogonalnej przestrzeni V , jeśli:

$$\begin{aligned} (a) \quad & v_1 := e_1 + e_2 + e_3 + 3ie_4, \quad v_2 := e_1 + 2e_2 + 3e_3 - 2ie_4; \\ (b) \quad & v_1 := e_1 - e_2 - e_3 + e_4, \quad v_2 := e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4; \end{aligned}$$

Zadanie 2. Niech $(\cdot|\cdot)$ będzie takim iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{C}^n$, że kolumny danej macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{C}^n_n$ tworzą bazę ortogonalną. Wykazać, że macierz $G = (AA^\dagger)^{-1}$ jest macierzą Grama kanonicznej bazy przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Dla $n = 3$ obliczyć iloczyn skalarny $(x|y)$, jeśli

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, że wzór

$$(v|w) := \sum_{k=-1}^1 \overline{v(k)} w(k)$$

określa iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{C}_2[\cdot]$. Znaleźć rzut prostopadły wektora v na podprzestrzeń W , jeśli

$$v(t) := t^2 \quad \text{oraz} \quad W := \{w \in \mathbb{C}_2[\cdot] : \int_0^1 w(t) dt = 0\}.$$

Zadanie 4. Niech $V_1, V_2 \subset V$ będą podprzestrzeniami przestrzeni euklidesowej (lub unitarnej), takimi że $\dim V_1 = \dim V_2$. Wykazać, że

$$\dim(V_1^\perp \cap V_2) = \dim(V_1 \cap V_2^\perp).$$

Zadanie 5. Znaleźć odległość dwóch prostych $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$, jeżeli

$$L_1 := \left\{ (x, y, z) : x - 3 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{3} \right\}$$

oraz $L_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2$, gdzie

$$\Pi_1 := \{(x, y, z) : x - 4y = 5\}, \quad \Pi_2 := \{(x, y, z) : z + 2y = -5\}.$$

Zadanie 6. Niech

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć objętość bryły $T_1 \cup T_2 \subset \mathbb{R}^3$, jeśli T_1, T_2 są czworościanami $T_1 := \Delta(abcd)$, $T_2 := \Delta(abce)$.

Zadanie 7. Niech V będzie przestrzenią unitarną oraz $A, B \in \text{End}(V)$. Dowieść, że jeśli A i B są operatorami hermitowskimi oraz $A > 0$, to operator AB jest diagonalizowalny i ma spektrum rzeczywiste; jeśli ponadto również $B > 0$, to operator AB ma spektrum dodatnie.

Zadanie 8. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A ; sprawdzić, że jest to macierz normalna oraz znaleźć ortonormalną bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3$ złożoną z jej wektorów własnych

$$(a) A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (b) A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Dowieść, że operator $F \in \text{End} V$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $v \in V$ spełniony jest warunek $\|Fv\| = \|F^\dagger v\|$.

Zadanie 10. Sprawdzić, że operator mnożenia przez macierz R_i jest obrotem w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (ze standardowym iloczynem skalarnym); wyznaczyć oś oraz kąt obrotu:

$$R_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & -10 & -10 \\ 2 & 11 & -10 \\ 14 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 6 & -6 & 7 \\ 9 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. Dowieść, że dla $F \in \text{End}(V)$ w przestrzeni unitarnej V zachodzi równoważność

$$(F^\dagger F = FF^\dagger) \iff (\exists H, U \in \text{End}(V) : \quad H^\dagger = H, \quad U^\dagger U = \mathbf{1}, \quad HU = UH = F)$$

Zadanie 12. Niech V będzie przestrzenią unitarną, a F i P — operatorami w V , takimi że P jest rzutem ortogonalnym, a F — operatorem unitarnym, tzn. $P^2 = P^\dagger = P$ oraz $F^\dagger = F^{-1}$. Dowieść, że jeśli $PF P = FP$, to $FP = PF$.