ALGEBRA R 10

$$[F^*]^\gamma_\varepsilon = \left[\,[F^*\varepsilon^1]^\gamma \quad [F^*\varepsilon^2]^\gamma\,\right] = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$[F]^e_u = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad\qquad [F^*]^\gamma_\varepsilon = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Macierze te mają ze sobą wiele wspólnego! Nie jest to przypadek. Macierz F^* w bazach ε i γ powstała z macierzy F w bazach e i u poprzez transpozycję, czyli zamianę wierszy na kolumny.

$$a \in M_{n\times m}(\mathbb{K}) \quad a^T \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad (a^T)^i{}_j = a^j{}_i$$

TWIERDZENIE: Niech $F \in L(V,W)$, niech także e i ε oraz f i φ będą parami baz dualnych w V i V^* oraz W i W^* odpowiednio. Wówczas

$$[F^*]^\varepsilon_\varphi = \left([F]^f_e\right)^T$$

DOWÓD:

Oznaczamy macierz $[F^*]^\varepsilon_\varphi$ literą A, a wyrazy macierzowe symbolami $A^i{}_j$. Z definicji macierzy odwzorowania $A^i{}_j$ jest współczynnikiem przy ε^i w rozkładzie kowektora $F^*(\varphi^j)$ w bazie ε. Oznacza to, że

$A^i_j = \langle F^*(\varphi^j), e_i\rangle = \langle \varphi^j, F(e_i)\rangle \longleftarrow$ współczynnik przy f_j w rozkładzie $F(e_i)$ w bazie f a więc wyraz $\bullet^j{}_i$ macierzy $[F]^f_e = B$

$$A^i{}_j = B^j{}_i \ , \text{tzn} \quad A = B^T \quad \blacksquare$$

DWA FAKTY O F^*

STWIERDZENIE 1 $F \in L(V,W)$ $G \in L(W,U)$ wówczas

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

STWIERDZENIE 2 $F \in L(V,W)$

$$\ker F^* = (\operatorname{im} F)^\circ$$

DOWÓD (1) $V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} U$ $\qquad (G\circ F)^*(\varphi) = \varphi\circ G\circ F = F^*(\varphi\circ G) = G^*\circ F^*(\varphi)$

$V^* \xleftarrow{F^*} W^* \xleftarrow{G^*} U^*$ $\qquad \varphi \in U^*$

DOWÓD (2)

$V \xrightarrow{F} W$ $\qquad \ker F^* = \{\varphi\in W^* : F^*\varphi = 0\}$, $F^*\varphi \in V^*$

$V^* \xleftarrow{F^*} W^*$

$\forall v\in V \ \langle F^*\varphi, v\rangle = 0 = \langle \varphi, F(v)\rangle$

$\varphi\in\ker F^* \Rightarrow F^*\varphi = 0 \Rightarrow \forall v\in V \ \langle F^*\varphi, v\rangle = 0 \Rightarrow \forall v\in V \ \langle\varphi, F(v)\rangle = 0 \Rightarrow \varphi\in(\operatorname{im}F)^\circ$

$\ker F^* \subset (\operatorname{im}F)^\circ$

$\varphi\in(\operatorname{im}F)^\circ \Rightarrow \forall w\in\operatorname{im}F \ \langle\varphi, w\rangle = 0 \Rightarrow \forall v\in V \ \langle\varphi, F(v)\rangle = 0 = \langle F^*\varphi, v\rangle \Rightarrow \varphi\in\ker F^*$

$\operatorname{im}F^\circ \subset \ker F^*$

$\ker F^* = (\operatorname{im}F)^\circ$ ■

RZĄD MACIERZY, RZĄD ODWZOROWANIA

Niech $F\in L(V,W)$. Rzędem odwzorowania F nazywamy wymiar obrazu F

$\operatorname{rk} F = \dim\operatorname{im} F$

Niech $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy A $\quad \operatorname{rk} A$

STWIERDZENIE: $F\in L(V,W)$, e - baza V, f - baza W $\qquad \operatorname{rk}F = \operatorname{rk}[F]_e^f$

DOWÓD

Kolumnami macierzy $[F]_e^f$ są obrazy elementów bazy e względem F zapisane w bazie f.

$\operatorname{im}F = \langle F(e_1),\dots,F(e_n)\rangle$ $\operatorname{rk}F = \dim\operatorname{im}F = \dim\langle F(e_1),\dots,F(e_n)\rangle$. Przyporządkowanie elementom W elementów $\mathbb{K}^{\dim W}$ jest izomorfizmem, zatem

$$\dim\operatorname{im}F = \dim\langle F(e_1),\dots,F(e_n)\rangle = \dim\langle [F(e_1)]^f,\dots,[F(e_n)]^f\rangle = \operatorname{rk}[F]_e^f$$ ■

STWIERDZENIE: $\operatorname{rk}F = \operatorname{rk}F^*$

DOWÓD:

$$\operatorname{rk}F = \dim\operatorname{im}F = \dim(\ker F^*)^\circ = \dim W^* - \dim\ker F^* = \dim\operatorname{im}F^* = \operatorname{rk}F^*$$

$V \xrightarrow{F} W \qquad W^* \xrightarrow{F^*} V^*$

WNIOSEK:

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \qquad rk\, A = rk\, A^T$$

czyli liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest równa liczbie liniowo niezależnych wierszy macierzy.

PIERWSZA PRZYMIARKA DO WYZNACZNIKA

WYZNACZNIK MACIERZY 2x2: z nauki szkolnej wiadomo, że $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$. Potraktujmy ten wyznacznik jako odwzorowanie na kolumnach macierzy:

$$\det: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \ni \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) \longmapsto ad - bc \in \mathbb{K}$$

Odwzorowanie to jest liniowe ze względu na każdy argument:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \lambda ad - \lambda cb = \lambda(ad - cb) = \lambda \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} a+a' \\ c+c' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = (a+a')d - b(c+c') = ad + a'd - bc - bc' = ad - bc +$$
$$+ (a'd - bc') = \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) + \det\left(\begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$$

rachunek dotyczący drugiego argumentu jest analogiczny:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \lambda \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \lambda \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) \quad \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) +$$
$$+ \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b' \\ d' \end{bmatrix} \right)$$

det jest antysymetryczny: $\det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = - \det\left(\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right)$

$$ad - bc = -(bc - ad)$$

Warunek normalizacji $\det(e_1, e_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1$

Czy możemy uogólnić te warunki na wymiar n? Rozważmy zatem odwzorowanie

$D: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ mające następujące własności

(1) D jest n-liniowe, tzn liniowe ze względu na każdy argument

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \; D(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v_i', v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda D(v_1, \dots, v_i, \dots v_n) + \mu D(v_1, \dots, v_i', \dots v_n)$$

(2) D jest antysymetryczne, tzn

$$\forall_{i,j} \; D(v_1, v_2, \dots, \overset{i}{v_i}, \dots, \overset{j}{v_j}, \dots v_n) = - D(v_1, v_2, \dots, \overset{i}{v_j}, \dots, \overset{j}{v_i}, \dots v_n)$$

i zastanówmy się ile jest takich odwzorowań? Pytając „ile" tak naprawdę pytamy o wymiar przestrzeni wektorowej odwzorowań n-liniowych antysymetrycznych (na n-wymiarowej przestrzeni). Traktujemy ją jako podprzestrzeń wszystkich odwzorowań $Map(\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, która jest, jak wiadomo, przestrzenią wektorową.

Warunek n-liniowości powoduje, że odwzorowanie D jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości na wektorach bazowych

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} v_i^k e_k$$

$$D(v_1, v_2, \dots, v_n) = D(v_1^{k_1} e_{k_1}, v_2, \dots, v_n) = \sum_{k_1=1}^{n} v_1^{k_1} D(e_{k_1}, v_2, \dots, v_n) = \sum_{k_1=1}^{n} v_1^{k_1} D(e_{k_1}, v_2^{k_2} e_{k_2}, v_3, \dots, v_n) = \sum_{k_1,k_2} v_1^{k_1} v_2^{k_2} D(e_{k_1}, e_{k_2}, v_3, \dots, v_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n} v^{k_1} v^{k_2} \dots v^{k_n} D(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$$

D jest wyznaczone przez $D(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$ czyli wartości na wektorach bazowych. Układów $e_{k_1}, \dots, e_{k_n}$ wektorów spośród $(e_1, \dots, e_n)$ jest n^n. Jednak warunek antysymetrii powoduje, że jeśli tylko dwa wektory bazowe się powtarzają wartość D musi być 0:

$$\underbrace{D(v_1, v_2, \dots v, \dots, v, \dots v_n)}_{d} = -D(v_1, v_2, \dots v, \dots v, \dots v_n) \Rightarrow d = -d, \text{ tzn } d = 0$$

Z n^n liczb schodzimy więc do $n!$ wartości na układach różnych wektorów różniących się jedynie kolejnością. Ale tu znowu „wkracza" warunek antysymetrii: $D(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$ różni się od $D(e_1, \dots, e_n)$ jedynie znakiem. Znak zależy od liczby przestawień dwóch elementów potrzebnych do uporządkowania $e_{k_1}, \dots, e_{k_n}$ w kolejności rosnących indeksów. Ale uwaga! Czy to jest w ogóle dobrze określone? Okazuje się że sama liczba przestawień nie – to zależy od procedury. Jednak parzystość tej liczby przestawień jest dobrze określona, czyli znak o który chodzi można zdefiniować jednoznacznie. Żeby się o tym przekonać postudiujemy trochę teorię grup a szczególnie grupę PERMUTACJI

Ustaliliśmy zatem że wartość D na dowolnym układzie wektorów jest jednoznacznie wyznaczona przez wartość $D(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

TWIERDZENIE

Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\det: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ spełniające warunki:

(1) det jest n-liniowe
(2) det jest antysymetryczne
(3) $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$

Odwzorowanie z powyższego stwierdzenia nazywamy wyznacznikiem. Praktyczne liczenie wyznaczników, wyprowadzenie wzorów i.t.d. odkładamy na po-permutacjach.

PERMUTACJE

Przypominamy definicję grupy:

Zbiór G wraz z działaniem $\circ : G\times G \longrightarrow G$ spełniającym warunki

(1) $\forall\, g,h,k\in G \quad g\circ(h\circ k) = (g\circ h)\circ k$ łączność

(2) $\exists\, e\in G : \forall\, g\in G \quad g\circ e = eg = g$ element neutralny

(2) $\forall\, g\in G\ \exists\, h\in G : \quad g\circ h = h\circ g = e$ element odwrotny

STWIERDZENIE: W grupie istnieje dokładnie jeden element neutralny

DOWÓD:

Załóżmy, że e i e' są neutralne wówczas

$$e = e\circ e' = e' \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE: W grupie każdy element ma dokładnie jeden element odwrotny

DOWÓD: Niech h, h' będą odwrotne do g. Wówczas

$$h'g = e \quad /\cdot h$$

$$\underbrace{h'g}_{e}h = h \Rightarrow h'e = h \Rightarrow h' = h \quad \blacksquare$$

PRZYKŁAD Niech X będzie dowolnym zbiorem. $S_X = \{ f\in Map(X,X) : f \text{ jest bijekcją} \}$ z działaniem składania jest grupą. Elementem neutralnym tej grupy jest odwzorowanie identycznościowe

Gdy $X = \{1,2,3,\dots,n\}$ grupę S_X oznaczamy S_n.

PRZYKŁAD Omówimy dokładnie grupę S_3. Ma ona $3! = 6$ elementów, które oznaczymy

$$S_3 = \{e, o_1, o_2, s_1, s_2, s_3\}$$

e: $e(1)=1 \quad e(2)=2 \quad e(3)=3$

o_1: $o_1(1)=2 \quad o_1(2)=3 \quad o_1(3)=1$

o_2: $o_2(1)=3 \quad o_2(2)=1 \quad o_2(3)=2$ $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

s_1: $s_1(1)=1 \quad s_1(2)=3 \quad s_1(3)=2$

s_2: $s_2(1)=3 \quad s_2(2)=2 \quad s_2(3)=1$

s_3: $s_3(1)=2 \quad s_3(2)=1 \quad s_3(3)=3$ $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Składanie permutacji:

$$S_3 \circ O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = S_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$O_2 \circ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

$S_3 \circ O_2 \neq O_2 \circ S_3$ grupa S_3 jest NIEPRZEMIENNA!