ALGEBRA R 14

FORMY DWULINIOWE

Formę dwuliniową na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie

$Q: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ spełniające warunki

$\forall v, v', w, w' \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$$Q(\lambda v + \mu v', w) = \lambda Q(v, w) + \mu Q(v', w)$$
$$Q(v, \lambda w + \mu w') = \lambda Q(v, w) + \mu Q(v, w')$$

W fizyce obiekty tego rodzaju pojawiają się często:

(1) Iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^3$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

(2) Związek między energią kinetyczną w ruchu obrotowym bryły sztywnej a prędkością kątową ma postać $E = \frac{I_{(p,\bar{n})}\,\omega^2}{2}$. We wzorze tym ω jest wartością prędkości kątowej zaś wielkość $I_{(\bar{n},p)}$ to moment bezwładności bryły względem osi obrotu przechodzącej przez punkt p i mającej wektor kierunkowy $\bar{n}$. Moment bezwładności charakteryzuje rozkład masy wewnątrz bryły. Okazuje się, że zależność od kierunku osi obrotu, a więc i od prędkości kątowej ma postać formy dwuliniowej symetrycznej nazywanej tensorem bezwładności
$$E = \frac{1}{2} I_p(\bar{\omega}, \bar{\omega})$$
obliczonej na $\bar{\omega}$ w obu miejscach na argumenty.

(3) druga pochodna funkcji wielu zmiennych jest to macierz, której wyrazami są drugie pochodne cząstkowe funkcji f. Na pozycji (i,j) stoi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. Przy spełnieniu odpowiednich warunków (o czym będzie na analizie) drugie pochodne cząstkowe są symetryczne, nie musimy więc precyzować, który indeks oznacza wiersz a który kolumnę. Symetryczna macierz oznacza symetryczną formę.

(4) metryka Minkowskiego w szczególnej teorii względności pochodzi od formy dwuliniowej symetrycznej $\eta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, określonej na czterowymiarowej przestrzeni wektorowej. Od „zwykłego" iloczynu skalarnego różni się tym, że „kwadrat długości wektora" wyznaczony z tej formy, czyli $\eta(v, v)$ nie zawsze jest dodatni. Np wektory styczne do trajektorii promieni świetlnych mają „długość" równą zero, choć same są niezerowe. Są wektory o „długości" dodatniej (styczne do linii świata) i ujemnej.

PRZYPOMNIENIA: przy okazji ogólnorozwojowego wstępu do wykładu o wyznaczniku powiedziane było, że (1) zbiór wszystkich form dwuliniowych na przestrzeni wektorowej V wymiaru n jest przestrzenią wektorową z działaniami jak zwykle dla przestrzeni odwzorowań i wymiaru n^2. (2) Zbiory form odpowiednio symetrycznych i antysymetrycznych są podprzestrzeniami wektorowymi wymiarów $n(n+1)/2$ dla symetrycznych i $n(n-1)/2$ dla antysymetrycznych. (3) Obserwując, że jednocześnie symetryczna i antysymetryczna jest jedynie forma zerowa oraz że suma wymiarów $n(n-1)/2 + n(n+1)/2 = \frac{n}{2}(n-1+n+1) = n^2$ stwierdzamy, że przestrzeń form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form dwuliniowych symetrycznych i antysymetrycznych. Rozkład na składowe ma postać:

$$Q = Q_+ + Q_- \quad : \quad Q_+(v,w) = \frac{1}{2}\big(Q(v,w)+Q(w,v)\big), \quad Q_-(v,w) = \frac{1}{2}\big(Q(v,w)-Q(w,v)\big).$$

MACIERZ FORMY DWULINIOWEJ:

Niech $e=(e_1,\dots,e_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Niech także $Q: V\times V \to \mathbb{K}$ będzie formą dwuliniową na V. Liniowość ze względu na oba argumenty pozwala zdefiniować formę poprzez podanie jej wartości na wektorach bazowych. Istotnie:

$$v = \sum_i v^i e_i, \quad w = \sum_i w^i e_i \qquad Q(v,w) = Q\Big(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\Big) = \sum_i v^i Q\Big(e_i, \sum_j w^j e_j\Big)$$

$$= \sum_i \sum_j v^i w^j \, Q(e_i, e_j).$$

Liczby $Q_{ij} = Q(e_i, e_j)$ jednoznacznie określają formę Q. Liczby te potraktować można jako wyrazy macierzowe macierzy $n\times n$. Pierwszy indeks numeruje wiersze a drugi kolumny. Macierz tak zbudowaną oznaczać będziemy $[Q]_e$. Działanie Q na wektory v, w we współrzędnych zapisać można jako

$$Q(v,w) = \left([v]^e\right)^T [Q]_e \, [w]^e$$

Zwróćmy uwagę na różnicę między macierzą odwzorowania $V \to V$ a macierzą formy dwuliniowej. Obie wyglądają jednakowo, tzn jak tabelka liczb $n\times n$ ale działają inaczej. Porównajmy:

$F: V \longrightarrow V$

$$[F(v)]^e = [F]^e_e [v]^e$$

$$[F]^g_g = \boxed{[id]^g_e} [F]^e_e [id]^e_g$$

$Q: V \times V \to \mathbb{K}$

$$Q(v,w) = ([v]^e)^T [Q]_e [w]^e$$

jak zamienić bazę w macierzy formy dwuliniowej?

$$[v]^g = [id]^g_e [v]^e \qquad [w]^g = [id]^g_e [w]^e$$

$$Q(v,w) = ([v]^g)^T [Q]_g [w]^g = \left([id]^g_e [v]^e\right)^T [Q]_g \left([id]^g_e [w]^e\right) =$$

$$= ([v]^e)^T \left([id]^g_e\right)^T [Q]_g [id]^g_e [w]^e$$

$$[Q]_g = \boxed{\left([id]^g_e\right)^T} [Q]_e [id]^g_e$$

Zwracamy uwagę na różnice w prawie transformacji między bazami dla odwzorowań i form. Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{U}$ macierz przejścia $\mathcal{U} = [id]^e_g$ to

$$[F]^g_g = \mathcal{U}^{-1} [F]^e_e \, \mathcal{U} \qquad\qquad [Q]_g = \mathcal{U}^T [Q]_e \, \mathcal{U}$$

Macierze „wyglądają" jednakowo ale działają i transformują się inaczej.

PRZYKŁAD

$V = \mathbb{R}_2[\cdot] \qquad Q(v,w) = 6 \int_0^1 \overset{\text{WZÓR}}{v'(t)} w(t)\, dt$

$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t, \quad e_3(t) = t^2$

$Q(e_1,e_1) = 0 \quad Q(e_1,e_2) = 0 \quad Q(e_1,e_3) = 0$

$Q(e_2,e_1) = 6\int_0^1 dt = 6 \quad Q(e_2,e_2) = 6\int_0^1 t\,dt = 3 \quad Q(e_3,e_2) = 6\int_0^1 t^2 dt = 2$

$$Q(e_3,e_1)=6\int_0^1 2t\,dt=6 \qquad Q(e_3,e_2)=6\int_0^1 2t^2dt=4 \qquad Q(e_3,e_3)=12\int_0^1 t^3dt=3$$

$$[Q]_e=\begin{bmatrix}0&0&0\\6&3&2\\6&4&3\end{bmatrix} \qquad Q_{ij}=Q(e_i,e_j)$$

macierz

wiersze

kolumny

Można też zapisać formę we współrzędnych

$$v=a_vt^2+b_vt+c_v \qquad w=a_wt^2+b_wt+c$$

$$[v]^e=\begin{bmatrix}c_v\\b_v\\a_v\end{bmatrix} \qquad [w]^e=\begin{bmatrix}c_w\\b_w\\a_w\end{bmatrix}$$

$$Q(v,w)=\begin{bmatrix}c_v & b_v & a_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\6&3&2\\6&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_w\\b_w\\a_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_v & b_v & a_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\6c_w+3b_w+2a_w\\6c_w+4b_w+3a_w\end{bmatrix}=$$

$$=6b_vc_w+3b_vb_w+2b_va_w+6a_vc_w+4a_vb_w+6a_va_w$$

wyrażenie we współrzędnych.

ROZKŁAD NA CZĘŚĆ SYMETRYCZNĄ i ANTYSYMETRYCZNĄ

$$Q(v,w)=\underbrace{\frac{1}{2}\left(Q(v,w)+Q(w,v)\right)}_{Q_+}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(Q(v,w)-Q(w,v)\right)}_{Q_-}$$

część symetryczna

część antysymetryczna

Dla formy z przykładu macierze $Q_\pm$ w bazie e mają postać

$$[Q_+]_e=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\6&3&2\\6&4&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&6&6\\0&3&4\\0&2&3\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&6&6\\6&6&6\\6&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$[Q_-]_e=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\6&3&2\\6&4&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&6&6\\0&3&4\\0&2&3\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-6&-6\\6&0&-2\\6&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&-3\\3&0&-1\\3&1&0\end{bmatrix}$$

FORMY DWULINIOWE SYMETRYCZNE, FORMY KWADRATOWE

W dalszym ciągu wykładu zajmować się będziemy formami dwuliniowymi symetrycznymi, tzn spełniającymi warunek $Q(v,w)=Q(w,v)$ dla dowolnych $v,w \in V$. Łatwo zauważyć, że macierz formy symetrycznej jest symetryczna tzn $Q_{ij}=Q(e_i,e_j)=Q(e_j,e_i)=Q_{ji}$.

W wielu dotychczasowych przykładach widzieliśmy, że forma dwuliniowa aplikowana jest często dwa razy do tego samego wektora: kwadrat długości wektora liczymy jako $(v|v)$, moment bezwładności względem konkretnej osi jako $I(\bar{n},\bar{n})$ czy w końcu drugą pochodną funkcji wielu zmiennych na przyroście h liczymy $f''(x)(h,h)$. Przykłady uzasadniają wprowadzenie dodatkowego pojęcia.

Formą kwadratową na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie pochodzące od formy dwuliniowej symetrycznej Q dane wzorem

$$q(v)=Q(v,v)$$

Nazwę uzasadnia następujący rachunek:

$$q(\lambda v)=Q(\lambda v,\lambda v)=\lambda^2 Q(v,v)=\lambda^2 q(v)$$

Jest jasne, z definicji, że każda forma dwuliniowa symetryczna definiuje formę kwadratową. Okazuje się że jest też odwrotnie, tzn znając formę kwadratową możemy odtworzyć formę dwuliniową od której ona pochodzi. Zadanie polega zatem na wyrażeniu $Q(v,w)$ poprzez własności q

$$q(v+w)=Q(v+w,v+w)=Q(v,v)+\boxed{Q(v,w)+Q(w,v)}+Q(w,w)=q(v)+$$

$$+\underline{2Q(v,w)}+q(w)$$

$$Q(v,w)=\frac{1}{2}\Big(q(v+w)-q(v)-q(w)\Big) \longleftarrow \text{formuła polaryzacyjna}$$

OBSERWACJA: Dla dowolnej, niekoniecznie symetrycznej formy Q można napisać $q(v)=Q(v,v)$. Pamiętając o rozkładzie przestrzeni form biliniowych na sumę prostą mamy

$$q(v)=Q(v,v)=Q_+(v,v)+Q_-(v,v)=Q_+(v,v)$$

gdzie $Q_+(v,w)=\frac{1}{2}\left[Q(v,w)+Q(w,v)\right]$

W definicji formy kwadratowej uczestniczy więc tylko część symetryczna formy. Część ta pojawia się w rachunku zmierzającym do wyprowadzenia formuły polaryzacyjnej.

Jak wygląda forma kwadratowa zapisana we współrzędnych względem bazy e w V?

Niech $e=(e_1,\dots,e_n)$ będzie bazą, oznaczmy przez (λ^i) odpowiednie współrzędne, tzn. $v=\lambda^1 e_1+\dots+\lambda^n e_n$

$$[v]^e=\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \vdots\\ \lambda^n\end{bmatrix} \qquad \left([v]^e\right)^T=[\lambda^1\ \lambda^2 \dots \lambda^n] \qquad Q_{ij}=Q(e_i,e_j)$$

$$q(v)=Q(v,v)=\left([v]^e\right)^T[Q]_e[v]^e=[\lambda^1\ \lambda^2\dots\lambda^n]\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{1n}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots & Q_{2n}\\ \vdots & & & & \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{n3} & \dots & Q_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\\ \vdots\\ \lambda^n\end{bmatrix}$$

$$=[\lambda^1\ \lambda^2\dots\lambda^n]\begin{bmatrix}\sum_i Q_{1i}\lambda^i\\ \vdots\\ \sum_i Q_{ni}\lambda^i\end{bmatrix}=\sum_{i,j}Q_{ji}\lambda^j\lambda^i=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\lambda_k^2+\sum_{i\neq j}Q_{ij}\lambda^i\lambda^j=\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\lambda_k^2+2\cdot\sum_{i<j}Q_{ij}\lambda^i\lambda^j$$