ALGEBRA R 17

Struktura endomorfizmu liniowego 1

- wstęp i motywacje
- operatory rzutowe

STRUKTURA ENDOMORFIZMU LINIOWEGO

W wykładzie 7 w zeszłym semestrze pojawił się przykład w którym należało policzyć A^n dla pewnej macierzy 2×2. Chodziło wtedy o znalezienie jawnego wzoru na n-ty wyraz ciągu danego rekurencyjnie:

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} \qquad x_0 = 1,\ x_1 = 3.$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = A\cdot A \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} = \dots = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A^n policzyliśmy zamieniając bazę w $\mathbb{R}^2$ w taki sposób, żeby macierz A była diagonalna. W wykładzie 7 ta nowa baza była podana, ale jak ją znaleziono?

PRZYKŁAD: Rozważmy układ równań różniczkowych

$$\dot{x} = 2x - 2y \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = M\vec{r}$$
$$\dot{y} = 3x - 5y$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \dot{\vec{r}}(t)\,dt = \vec{r}_0 + \int_0^t M\vec{r}(t)\,dt$$

Równanie różniczkowe zastępujemy całkowym. Rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń.

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t M\vec{r}_0\,dt = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \int_0^t M(\vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t)\,dt = \vec{r}_0 + \int_0^t (M\vec{r}_0 + M^2\vec{r}_0 t)\,dt =$$

$$= \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M^2 t^2 \vec{r}_0 \qquad \vec{r}_3 = \vec{r}_0 + \int_0^t M\left(\vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M\vec{r}_0 t^2\right)dt = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M\vec{r}_0 t^2 + \frac{1}{3!}M^3\vec{r}_0 t^3$$

$$\circ\circ\circ \qquad \vec{r}_n = \vec{r}_0 + M\vec{r}_0 t + \frac{1}{2}M\vec{r}_0 t^2 + \dots + \frac{1}{n!}M^n\vec{r}_0 t^n$$

$$\vec{r}_n = \left(\mathbb{1} + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \frac{1}{3!}M^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}M^nt^n\right)\vec{r}_0$$

$$\vec{r}(t) = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}t^kM^k\right)\vec{r}_0 = e^{tM}\vec{r}_0$$

czy ta granica istnieje? Okazuje się, że tak (patrz Analiza)

DEFINICJA $\quad e^M := \mathbb{1} + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots + \frac{1}{k!}M^k + \dots$

PROBLEM: Jak to obliczyć? Gdyby udało nam się to obliczyć dostalibyśmy ogólne rozwiązanie układu równań. Widać, że musimy umieć wyznaczać nie tylko wartości wielomianów na macierzach.

Za wyznaczanie e^M można się zabrać tak, jak za wyznaczanie A^n. Zapiszmy M w innej, wygodniejszej bazie. Najlepiej, żeby M była w tej bazie diagonalna. Macierz diagonalna działa na wektory bazy standardowej mnożąc je przez odpowiednie liczby na diagonali

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ Szukamy zatem wektorów $v \in V$ i liczb $\lambda \in \mathbb{R}$ takich, że $Mv = \lambda v$

$Mv = \lambda v \Rightarrow Mv - \lambda v = 0$ $\quad (M - \lambda\mathbb{1})v = 0$ Jeśli $v \neq 0$ istnieje to znaczy, że rząd macierzy $M - \lambda\mathbb{1}$ nie jest maksymalny, $\ker(M-\lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}$. Jakie λ wchodzą w grę? To można sprawdzić licząc $\det(M - \lambda\mathbb{1})$ i przyrównując do 0:

$$0 = \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \det\left(\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}2-\lambda & -2\\ 3 & -5-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) + 6 =$$

$$= -10 + 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda+4)(\lambda-1)$$

wielomian charakterystyczny M

$\lambda = -4$ lub $\lambda = 1$

wartości własne M

Sprawdzimy, czy dla danych wartości λ znajdziemy v

$$\lambda = -4 \quad \ker\begin{bmatrix}2+4 & -2\\ 3 & -5+4\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix}6 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix} = \ker[3 \ -1] = \left\langle\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right\rangle$$

wektory własne

$$\lambda = 1 \quad \ker\begin{bmatrix}2-1 & -2\\ 3 & -5-1\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\end{bmatrix} = \ker[1 \ -2] = \left\langle\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

baza diagonalizująca

$v_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$$[M]^v_v = \begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad [id]^e_v = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} = Q \quad [id]^v_e = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} = Q^{-1}$$

$$M = Q\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}Q^{-1} \quad M^n = Q[\ \ ]Q^{-1}Q[\ \ ]Q^{-1}\cdots Q[\ \ ]Q^{-1} = Q\begin{bmatrix}(-4)^n & 0\\ 0 & 1^n\end{bmatrix}Q^{-1}$$

$$e^{tM} = \mathbb{1} + tM + \frac{1}{2}t^2M^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^nM^n + \dots = Q\cdot Q^{-1} + tQ\begin{bmatrix}-4&0\\0&1\end{bmatrix}Q^{-1} + \frac{1}{2}t^2Q\begin{bmatrix}(-4)^2&0\\0&1\end{bmatrix}Q^{-1} + \dots + \frac{1}{n!}t^nQ\begin{bmatrix}(-4)^n&0\\0&1\end{bmatrix}Q^{-1} + \dots =$$

$$= Q\left(\mathbb{1} + \begin{bmatrix}-4t&0\\0&t\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(-4)^2t^2&0\\0&t^2\end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}(-4)^nt^n&0\\0&t^n\end{bmatrix} + \dots\right)Q^{-1} =$$

$$= Q\begin{bmatrix}e^{-4t}&0\\0&e^t\end{bmatrix}Q^{-1} = \begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-4t}&0\\0&e^t\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&2\\3&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}e^{-4t}&2e^t\\3e^{-4t}&e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\3&-1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-e^{-4t}+6e^t & 2e^{-4t}-2e^t\\ -3e^{-4t}+3e^t & 6e^{-4t}-e^t\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left\{e^{-4t}\begin{bmatrix}-1&2\\-3&6\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}6&-2\\3&-1\end{bmatrix}\right\}$$

Oznaczamy $x(0)=x_0$ $y(0)=y_0$ wtedy

$$x(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-4t}(2y_0-x_0) + e^t(6x_0-2y_0)\right) = \frac{1}{5}\left[x_0\left(6e^t - e^{-4t}\right) + y_0\left(2e^{-4t}-2e^t\right)\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-4t}(-3x_0+6y_0) + e^t(3x_0-y_0)\right) = \frac{1}{5}\left[x_0\left(-3e^{-4t}+3e^t\right) + y_0\left(6e^{4t}-e^t\right)\right]$$

Wytrwali mogą sprawdzić, że powyższe funkcje rzeczywiście spełniają wyjściowy układ równań. W dalszym ciągu wykładu będziemy zajmować się strukturą endomorfizmów liniowych, czyli będziemy szukać takich baz w przestrzeni wektorowej, żeby macierz endomorfizmu w danej bazie była możliwie najwygodniejsza. Pozwala to lepiej zrozumieć działanie endomorfizmów liniowych na przestrzeni wektorowej. Nie zawsze bowiem jest tak, że da się znaleźć bazę diagonalizującą.

Zanim zajmiemy się endomorfizmami w ogólności wprowadzimy trochę przydatnych oznaczeń i pojęć. Przestrzeń endomorfizmów liniowych przestrzeni wektorowej V oznaczamy $\mathrm{End}\,V$.

OPERATORY RZUTOWE

Przy okazji omawiania rozkładu przestrzeni na sumę prostą używaliśmy szczególnego rodzaju odwzorowań liniowych: Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ to każdy wektor rozkłada się jednoznacznie na sumę $v = v_1 + v_2$ gdzie $v_i \in V_i$. Można więc zdefiniować dwa endomorfizmy liniowe

$v \longmapsto v_1$ rzut na V_1 wzdłuż V_2, oznaczenie $P^{V_2}_{V_1}$

$v \longmapsto v_2$ rzut na V_2 wzdłuż V_1 $P^{V_1}_{V_2}$

górny indeks będziemy czasem pomijać, jeśli będzie wiadomo z jaką sumą prostą pracujemy

Operatory $P_{V_1}^{V_2}$ i $P_{V_2}^{V_1}$ mają szczególną własność. Otóż

$$(P_{V_1}^{V_2})^2 = P_{V_1}^{V_2}, \quad (P_{V_2}^{V_1})^2 = P_{V_2}^{V_1}$$

Okazuje się że zachodzi następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE: Jeśli $P \in End(V)$ i $P^2 = P$ to $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ oraz P jest rzutem na $\operatorname{im} P$ wzdłuż $\ker P$.

DOWÓD: Rozważamy przypadek $\ker P \neq \{0\}$, gdy P jest odwracalny mamy $P^2 = P \Rightarrow P^2 P^{-1} = PP^{-1} \Rightarrow P = id_V$ i sytuacja jest trywialna.

Z bilansu wymiarów wiadomo, że $\dim V = \dim \ker P + \dim \operatorname{im} P$. Żeby wykazać, że $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ wystarczy sprawdzić $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{0\}$. Weźmy więc $v \in \ker P \cap \operatorname{im} P$. Wiadomo wtedy, że

$P v = 0$ oraz $\exists u : v = Pu$ Prowadzimy następujący rachunek:

$$v = Pu \underset{P = P^2}{=} P^2 u = P(Pu) \underset{v = Pu}{=} Pv = 0$$

Jedynym elementem $\ker P \cap \operatorname{im} P$ jest więc 0.

Wiemy już, że $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$, zatem każdy element $v \in V$ można jednoznacznie rozłożyć na sumę $v = v_0 + v_1$, $v_0 \in \ker P$, $v_1 \in \operatorname{im} P$

$$Pv = Pv_0 + Pv_1 = Pv_1 = v_1$$

Dla $v_1 \in \operatorname{im} P$ zachodzi $v_1 = Pu = P^2 u = P \underbrace{Pu}_{v_1} = Pv_1$

P jest więc rzutem na $\operatorname{im} P$ wzdłuż $\ker P$. W szczególności na $\operatorname{im} P$ odwzorowanie P działa jak identyczność.

Wróćmy teraz do sytuacji kiedy $V = V_1 \oplus V_2$ i definiujemy dwa rzuty $P_{V_1}^{V_2}$ i $P_{V_2}^{V_1}$. Ta para rzutów ma następujące własności

$$P_{V_1}^{V_2} + P_{V_2}^{V_1} = id_V, \quad P_{V_2}^{V_1} P_{V_1}^{V_2} = P_{V_1}^{V_2} P_{V_2}^{V_1} = 0$$

Okazuje się że jest też odwrotnie:

STWIERDZENIE: $P_1, P_2 \in End V$. Jeśli $P_1 + P_2 = id_V$ i $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ to P_1 i P_2 są rzutami, $\ker P_1 = \operatorname{im} P_2$, $\ker P_2 = \operatorname{im} P_1$.

DOWÓD: Z założenia wynika że $P_2 = id_V - P_1$. Mamy więc

$$(P_2)^2 = P_2 P_2 = P_2 (id_V - P_1) = P_2 - P_2 P_1 = P_2$$

Operator P_2 jest więc rzutem. Podobny rachunek można zrobić dla P_1. Skoro P_2 i P_1 są rzutami to $V = \ker P_2 \oplus \operatorname{im} P_2 = \ker P_1 \oplus \operatorname{im} P_1$

Niech teraz $v \in \operatorname{im} P_2$ tzn $v = P_2 u$. Wtedy $P_1 v = P_1 P_2 u = 0$, zatem $\operatorname{im} P_2 \subset \ker P_1$. Dalej weźmy $w \in \ker P_1$, tzn $P_1 w = 0$. Wtedy

$$0 = P_1 w = (id_V - P_2) w = w - P_2 w \quad \text{tzn} \quad w = P_2 w \quad \text{tzn} \quad w \in \operatorname{im} P_2 \text{ i } \ker P_1 \subset \operatorname{im} P_2$$

Ostatecznie, skoro $\ker P_1 \subset \operatorname{im} P_2$ i $\operatorname{im} P_2 \subset \ker P_1$ to $\ker P_1 = \operatorname{im} P_2$. Podobne rozważanie z zamianą indeksów 1 i 2 doprowadzi do wniosku, że $\ker P_2 = \operatorname{im} P_1$. ∎

Ostatecznie więc jeśli $P_1 + P_2 = id_V$ i $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ to przestrzeń V rozkłada się na sumę prostą

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \text{gdzie} \quad V_1 = \operatorname{im} P_1 = \ker V_2, \quad V_2 = \operatorname{im} P_2 = \ker P_1$$

Ostatnie stwierdzenie ma uogólnienie na większą liczbę składników:

STWIERDZENIE: $P_1, \dots, P_k \in \operatorname{End}(V)$. Jeśli $P_1 + \dots + P_k = id_V$ oraz $P_i P_j = 0$ dla $i \neq j$ to dla dowolnego i P_i jest rzutem oraz $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_2$ gdzie $V_1 = \operatorname{im} P_i$, $\ker P_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \dots \oplus V_k$

DOWÓD: Ustalmy i i obliczmy P_i^2:

$$P_i = id_V - P_1 - P_2 - \dots P_{i-1} - P_{i+1} - \dots - P_k$$

$$P_i^2 = P_i P_i = P_i (id_V - P_1 - P_2 - \dots P_{i-1} - P_{i+1} - \dots - P_k) = P_i - \cancel{P_i P_1} - \cancel{P_i P_2} - \dots - \cancel{P_i P_{i-1}} - \cancel{P_i P_{i+1}} - \dots - \underbrace{\cancel{P_i P_k}}_{0} = P_i.$$

Otrzymaliśmy $P_i^2 = P_i$, tzn P_i jest rzutem. Oznaczmy więc dla każdego i $V_i = \operatorname{im} P_i$. Weźmy teraz parę i, j taką że $i \neq j$ i zbadajmy $V_i \cap V_j$. Jeśli $v \in V_i \cap V_j$ to $v = P_i u_i = P_j u_j$ dla pewnych u_i, u_j należących do V.

$$v = P_i u_i = P_i^2 u_i = P_i \underbrace{P_i u_i} = \underbrace{P_i P_j} u_j = 0 \quad \text{zatem} \quad V_i \cap V_j = \{0\}$$

Jednocześnie $P_1 + P_2 + \dots + P_n = id_V$, zatem dowolne v jest postaci

$$v = id_V v = (P_1 + P_2 + \dots + P_k) v = P_1 v + \dots + P_k v = w_1 + \dots + w_k, \quad w_i \in \operatorname{im} P_i = V_i$$

zatem $V = V_1 + \dots + V_k$ ∎

Układ odwzorowań $P_1,\dots,P_k$ spełniający warunki jak wyżej, czyli $P_1+\dots+P_k=id_V$, $P_iP_j=0$ dla $i\neq j$ nazywa się **rzutowy rozkład jedności**. Zgodnie ze stwierdzeniem, rzutowy rozkład jedności definiuje rozkład V na sumę prostą k-podprzestrzeni.

W badaniu struktury endomorfizmu liniowego przydaje się możliwość obcięcia odwzorowania do mniejszej podprzestrzeni. Ma to sens wtedy kiedy działanie operatora nie wyprowadza poza tę podprzestrzeń. Mówimy, że podprzestrzeń $W\subset V$ jest **niezmiennicza ze względu na $F\in \mathrm{End}\,V$** jeśli $F(W)\subset W$.

Załóżmy teraz, że W jest niezmiennicza ze względu na F. Konstruujemy bazę $e=(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ w taki sposób, aby $W=\langle e_1,\dots,e_k\rangle$. Wtedy macierz F ma postać

$$[F]_e^e = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \end{array}$$

Najlepsza sytuacja jest wtedy gdy istnieje dopełniająca przestrzeń niezmiennicza, tzn. gdy $(e_{k+1},\dots,e_n)$ można dobrać tak aby $U=\langle e_{k+1},\dots,e_n\rangle$ też miała własność $F(U)\subset U$.

Wtedy $V=W\oplus U$ rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych i $*$ też jest 0.

STWIERDZENIE: $F\in \mathrm{End}(V)$. V rozkłada się na sumę prostą $V_1\oplus V_2$ podprzestrzeni niezmienniczych względem F wtedy i tylko wtedy gdy istnieje rzutowy rozkład jedności P_1,P_2 taki, że $FP_1=P_1F$ i $FP_2=P_2F$ (tzn. $[P_1,F]=0$, $[P_2,F]=0$)

DOWÓD: $\Rightarrow$ Zgodnie z założeniem V_1 i V_2 są podprzestrzeniami niezmienniczymi dla F oraz $V_1\oplus V_2=V$. Weźmy (P_1,P_2) – rzutowy rozkład jedności związany z rozkładem V na sumę prostą. Wiadomo, że $P_1|_{V_1}=id_{V_1}$, podobnie $P_2|_{V_2}=id_{V_2}$.

Weźmy $v\in V$ i zapiszmy $v=v_1+v_2$, $v_1\in V_1$ i $v_2\in V_2$

$$FP_1v=FP_1(v_1+v_2)=\underset{\underset{V_1}{\cap}}{Fv_1}=id_{V_1}Fv_1=P_1Fv_1=P_1(Fv_1+\underset{\underset{V_2}{\cap}}{Fv_2})=P_1Fv$$

podobnie dla P_2

$$FP_2v=FP_2(v_1+v_2)=Fv_2=id_{V_2}Fv_2=P_2Fv_2=P_2(Fv_1+Fv_2)=P_2Fv$$

$\Leftarrow$ Załóżmy teraz że (P_1,P_2) jest rzutowym rozkładem jedności takim że $P_iF=FP_i$. Rzutowy rozkład jedności jest zawsze związany z rozkładem V na sumę prostą $V=V_1\oplus V_2$. Pokażemy, że V_1 i V_2 są niezmiennicze.