ALGEBRA R 19

STRUKTURA ENDOMORFIZMU

— rozkład na p.p. pierwiastkowe

— operatory nilpotentne

ROZKŁAD NA PODPRZESTRZENIE PIERWIASTKOWE

Możemy teraz połączyć wiedzę na temat rzutów i rzutowego rozkładu jedności z pojęciem wielomianu charakterystycznego i ogólną wiedzą dotyczącą wielomianów i skonstruować możliwie drobny rozkład przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych. W dalszym ciągu pracować będziemy na przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$.

Ustalmy $F \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = n$, w_F jest wielomianem charakterystycznym. Z podstawowego twierdzenia algebry wynika, że w_F rozkłada się na iloczyn postaci

$$w_F(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_r}, \quad k_1+k_2+\dots+k_r = n$$

Zbiór $Sp(F) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ nazywamy spektrum operatora F, liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ to wartości własne operatora F a liczby $k_1, \dots, k_r$ to krotności odpowiednich wartości własnych. Oznaczamy

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{w_F(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}$$

Największy wspólny dzielnik φ_i jest wielomianem stałym, zatem istnieje układ wielomianów $w_1, \dots, w_r$ taki, że

$$w_1\varphi_1 + w_2\varphi_2 + \dots + w_r\varphi_r = 1$$

Zdefiniujmy operatory $P_i := w_i(F)\varphi_i(F)$. Mamy

(1) $P_1 + P_2 + \dots + P_r = w_1(F)\varphi_1(F) + w_2(F)\varphi_2(F) + \dots + w_r(F)\varphi_r(F) = \mathbb{1}$

(2) $P_i P_j = w_i(F)\varphi_i(F) w_j(F)\varphi_j(F) \underset{\text{dla } i \neq j}{=} v(F) w_F(F) = 0$

zatem $(P_1, \dots, P_r)$ jest rzutowym rozkładem jedności. Zgodnie ze stosownym twierdzeniem istnieje dla niego odpowiedni rozkład na sumę prostą

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r \quad \text{gdzie} \quad V_i = \mathrm{im}\, P_i$$

Składniki sumy prostej są niezmiennicze dla F, bo wszystkie rzuty P_i obliczamy jako wartości pewnych wielomianów od F, zatem $[F, P_i] = 0$.

Zanim zastanowimy się jaki jest wymiar V_i i czy nie można by jej jakoś łatwiej wyznaczyć zróbmy przykład rachunkowy:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad w_T(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \qquad Sp(T) = \{1, 2\} \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{w_T(\lambda)}{(\lambda-1)^2} = -(\lambda-2) = (2-\lambda) \qquad \varphi_2(\lambda) = \frac{w_T(\lambda)}{(\lambda-2)} = -(\lambda-1)^2$$

$\lambda^2-2\lambda+1$	$\lambda-2$	1
λ	1	0

λ

$$-\lambda(\lambda-2)+(\lambda-1)^2=1$$
$$\lambda(2-\lambda)+(\lambda-1)^2=1$$
$$\omega_1(\lambda)=\lambda \qquad \omega_2(\lambda)=-1$$

$$P_1=\omega_1(T)\varphi_1(t)=-T(T-2\cdot\mathbb{1})$$

$$P_2=(T-\mathbb{1})^2$$

$$P_1=-\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&-2&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$P_2=(T-\mathbb{1})^2=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

Sprawdźmy, że istotnie są to rzuty:

$$P_1^2=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}=P_1$$

$$P_2^2=\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}=P_2$$

$$P_1P_2=\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$V_1=\operatorname{im}P_1=\operatorname{im}\begin{bmatrix}-2&3&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{bmatrix}=\operatorname{im}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad V_2=\operatorname{im}\begin{bmatrix}3&-3&0\\2&-2&0\\1&-1&0\end{bmatrix}=\left\langle\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

Weźmy bazę $f_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $f_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $f_3=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ tzn $V_1=\langle f_1,f_2\rangle$ $V_2=\langle f_3\rangle$ i wyznaczmy $[T]_f^f$

$$Tf_1=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=f_1 \qquad Tf_2=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=f_1+f_2$$

$$Tf_3=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\4\\2\end{bmatrix}=2f_3$$

$$[T]_f^f=\begin{array}{c}\begin{array}{cc|c}\;\;V_1&&V_2\end{array}\\\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&2\end{array}\right]\end{array}$$

Jak widać w powyższym przykładzie poszukiwanie przestrzeni V_i jest kłopotliwe – rachunki na wielomianach bywają długie a obliczanie wartości wielomianu od macierzy też nie jest najprzyjemniejsze. Udowodnimy zatem przydatne stwierdzenie

STWIERDZENIE W przyjętych wcześniej oznaczeniach $V_i=\ker(F-\lambda_i)^{k_i}$

DOWÓD:

$$V_i = \operatorname{im} P_i = \operatorname{im} \omega_i(T)\varphi_i(T)$$

Weźmy $v \in V_i$. Istnieje więc $u \in V$ takie, że $v = P_i(u)$

$$(F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} v = (F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} P_i(v) = \underbrace{(F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} \varphi_i(T)}_{\omega_F(F)} \omega_i(T) v = \underbrace{\omega_F}_{=0}(F)\,\omega_i(T) v = 0$$

Niech teraz $v \in \ker (F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i}$ tzn $(F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} v = 0$

$v = P_1 v + P_2 v + \dots + P_i v + \dots + P_r v$ Pamiętamy, że dla $j \neq i$ $P_j = \varphi_j(T)\omega_j(T)$

a φ_j zawiera czynnik $(F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i}$, zatem $P_j v = 0$. Zostaje

$$v = P_i v, \text{ tzn } v \in \operatorname{im} P_i$$

Wykazaliśmy, że $\ker (F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} = \operatorname{im} P_i$ (zawieranie w obie strony) ∎

Przestrzeń $V_i = \ker (F-\lambda_i 1\!\!1)^{k_i} = \operatorname{im} \varphi_i(T)\omega_i(T)$ nazywa się podprzestrzenią pierwiastkową dla wartości własnej λ_i. Podprzestrzeń pierwiastkowa zawiera podprzestrzeń własną, tzn $\ker(F-\lambda_i 1\!\!1)$

Może się zdarzyć, że podprzestrzeń własna i pierwiastkowa są równe. Ma to miejsce zawsze gdy krotność wartości własnej jest 1, czasami także w pozostałych przypadkach.

Macierz operatora w bazie dostosowanej do rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe ma postać blokową. Kwestię wymiaru podprzestrzeni pierwiastkowej rozwiążemy badając działanie F obcięte do podprzestrzeni pierwiastkowej.

Ustalmy zatem wartość własną λ_i i zbadajmy działanie F na podprzestrzeni pierwiastkowej $V_i = \ker(F-\lambda_i \mathrm{id}_V)^{k_i}$.

$$v \in V_i \quad Fv = [(F-\lambda_i \mathrm{id}_V) + \lambda_i \mathrm{id}_V]v = \underbrace{(F-\lambda_i \mathrm{id}_V)v}_{N_i} + \underbrace{\lambda_i v}_{D_i}$$

co to jest za operator? $\rightarrow N_i$

$D_i \leftarrow$ operator diagonalny w działaniu na v

$N_i = (F-\lambda_i \mathrm{id}_V)|_{V_i}$ ma własność $N_i^{k_i} = 0$. Takie operatory nazywamy operatorami nilpotentnymi. Na podprzestrzeni pierwiastkowej zatem operator działa jako suma operatora diagonalnego (mnożenie przez liczbę) i operatora nilpotentnego.

W dalszym ciągu zajmiemy się więc operatorami nilpotentnymi.

OPERATORY NILPOTENTNE

Rozważamy operator $N \in End(V)$ na zespolonej p.w. V taki, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ $N^k = 0$. Najmniejszą liczbę naturalną k taką, że $N^k = 0$ nazywamy stopniem nilpotentności.

STWIERDZENIE $N \in End(V)$ nilpotentny, $n = \dim V$. Wielomian charakterystyczny operatora N ma postać
$$\omega_N(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$$
tzn $Sp(N) = \{0\}$

DOWÓD: W przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{C}$ każdej wartości własnej towarzyszy przynajmniej jednowymiarowa przestrzeń własna. Weźmy więc $\lambda \in Sp(N)$ i dowolny wektor własny v dla wartości λ. Wtedy oczywiście $Nv = \lambda v$. Jeśli k jest stopniem nilpotentności to
$$0 = N^k v = \lambda^k v \Rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \blacksquare$$

STWIERDZENIE: Dla każdego $0 \neq v \in V$ istnieje liczba $h \in \mathbb{N}$, $h \leq k$ taka, że $N^h v = 0$ i $N^{h-1} v \neq 0$.

DOWÓD (Oczywisty). Operator N jest nilpotentny stopnia k, zatem zbiór liczb naturalnych m takich, że $N^m v = 0$ jest niepusty. Każdy niepusty zbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy. Z całą pewnością k należy do tego zbioru, zatem element najmniejszy jest $\leq k$. $\blacksquare$

Liczba h z poprzedniego stwierdzenia nazywana jest czasem wysokością wektora v względem operatora N. Istnieje funkcja $h: V \to \mathbb{N}$ przyporządkowująca każdemu wektorowi jego wysokość względem N.

STWIERDZENIE : Niech $v \in V$ i h będzie wysokością v. Wówczas wektory $(v, Nv, N^2 v, \dots, N^{h-1} v)$ są liniowo niezależne a podprzestrzeń $\langle v, Nv, \dots, N^{h-1} v \rangle$ jest niezmiennicza dla N.

DOWÓD: Weźmy kombinację liniową
$$\lambda_0 v + \lambda_1 N v + \lambda_2 N^2 v + \dots + \lambda_{h-1} N^{h-1} v = 0 \quad / N^{h-1}$$
$$\lambda_0 N^{h-1} v + \lambda_1 \underbrace{N^h v}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{N^{h+1} v}_{=0} + \dots + \lambda_{h-1} \underbrace{N^{2h-2} v}_{=0} = 0$$
$\lambda_0 N^{h-1} v = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$ lub $N^{h-1} v = 0$ ale to nieprawda, bo wektor v jest wysokości h. Mamy więc $\lambda_0 = 0$

Nasza kombinacja liniowa ma więc postać
$$\lambda_1 N v + \lambda_2 N^2 v + \dots + \lambda_{h-1} N^{h-1} v = 0 \quad / N^{h-2}$$
$$\lambda_1 N^{h-1} v + \lambda_2 \underbrace{N^h v}_{=0} + \dots = 0$$
$\lambda_1 N^{h-1} v = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ lub $N^{h-1} v = 0$ ale to nieprawda

... itd. w ten sposób wykazujemy, że $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{h-1} = 0$.

Podprzestrzeń $\langle v, Nv, \dots, N^{h-1}v\rangle$ jest niezmiennicza, gdyż

$$N\langle v, Nv, \dots, N^{h-1}v\rangle \subset \langle v, Nv, \dots, N^{h-1}v\rangle \quad \blacksquare$$

Podprzestrzeń jak w powyższym stwierdzeniu nazywa się podprzestrzenią cykliczną dla N.

STWIERDZENIE: Przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni cyklicznych dla N.
DOWÓD: Dowód indukcyjny względem wymiaru przestrzeni V

(1) $\dim V = 1$ W takim przypadku jedyny operator nilpotentny to operator zerowy. przestrzeń V jest wtedy całą przestrzenią cykliczną

(2) Założenie indukcyjne: tw. jest spełnione dla przestrzeni wymiaru $n-1$

(3) V: $\dim V = n$. Jeśli N jest nilpotentny to $\operatorname{im} N \subsetneq V$. Weźmy podprzestrzeń $\mathcal{U}$ wymiaru $n-1$ zawierającą $\operatorname{im} N$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r \qquad \mathcal{U}_i \text{ jest cykliczna dla } N|_{\mathcal{U}}$$

Weźmy teraz $v \in V \setminus \mathcal{U}$ wtedy $Nv \in \operatorname{im} N \subset \mathcal{U}$. Wektor Nv można więc Nv rozłożyć na składowe w $\mathcal{U}_i$

$$Nv = u_1 + u_2 + \dots + u_r \qquad u_i \in \mathcal{U}_i$$

Element $u_i \in \mathcal{U}_i$ może być elementem o największej wysokości w $\mathcal{U}_i$, albo może mieć wysokość mniejszą. Jeśli u_i ma największą wysokość to kładziemy $w_i = 0$. Jeśli u_i ma wysokość mniejszą to $u_i = Nw_i$ dla pewnego $w_i \in \mathcal{U}_i$

Weźmy teraz $v - \sum_{i=1}^{r} w_i = v'$ $\qquad Nv' = Nv - \sum_{i=1}^{r} Nw_i = u_1 + \dots + u_r - Nw_1 - \dots - Nw_r$

te wektory są albo zero albo u_i

Wektor v' ma tę własność, że Nv' rozkłada się na składowe w $\mathcal{U}_i$ które są wektorami o największej wysokości w $\mathcal{U}_i$. Ewentualnie $Nv' = 0$ jeśli wszystkie w_i były niezerowe. Rozważmy oddzielnie przypadki $Nv' = 0$ i $Nv' \neq 0$

$Nv' = 0$ Przestrzeń $\langle v'\rangle$ jest cykliczna wymiaru 1. $\langle v'\rangle \cap \mathcal{U}_i = \{0\}$, zatem

$$V = \langle v'\rangle \oplus \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r \text{ jest szukanym rozkładem.}$$

$Nv' \neq 0$ W rozkładzie Nv' na składowe $u_1' + u_2' + \dots + u_r'$ wybieramy składową o największej wysokości. Bez straty ogólności możemy uznać, że jest to u_1 (ewentualnie można przenumerować). Pokażemy, że

$$V = \langle v', Nv', \dots, N^m v'\rangle \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots + \oplus \mathcal{U}_r \quad \text{gdzie} \quad m = \dim \mathcal{U}_1$$

Sprawdzimy, że $\langle v', Nv', \dots, N^m v'\rangle \cap \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r = \{0\}$