ALGEBRA R 2

musi zawierać elementy postaci $x+iy$ dla wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$. Pokazaliśmy już wcześniej, że zbiór $S=\{(x+iy);\ x,y\in\mathbb{R}\}$ jest ciałem. Każde ciało zawierające $\mathbb{R}$ oraz i zawiera więc zbiór typu zbioru S. Pokażemy teraz, że S jest izomorficzne $(\mathbb{C},+,\cdot)$
Niech $\varphi:\mathbb{C}\to S$, $(x,y)\mapsto x+iy$. Rachunkiem sprawdzamy że φ jest homomorfizmem ciał. Sprawdźmy czy φ jest bijekcją. W tym celu należy sprawdzić, czy obraz φ jest całym zbiorem S oraz czy spełniony jest warunek

(tzn odwzorowaniem odwracalnym.)

$\varphi((x,y))=\varphi((a,b))\Rightarrow(x,y)=(a,b)$. Obraz φ jest całym zbiorem S - to oczywiste. Zróżnijmy więc, że $(x,y),(a,b)$ są takie, że

$\varphi((x,y))=\varphi((a,b))$

$x+iy=a+ib$ $\quad x-a+iy-ib=0$ $\quad (x-a)+i(y-b)=0$ Mamy więc dwie możliwości:

$\to y-b=0$ czyli $y=b$ wtedy $x-a=0$ i mamy $(a,b)=(x,y)$

$\to y-b\neq 0$ i wtedy $\frac{x-a}{b-y}=i$ To jednak oznacza $i\in\mathbb{R}$, a wiemy, że tak nie jest.

Ostatecznie mamy: każde ciało będące rozszerzeniem $\mathbb{R}$ o i zawiera zbiór typu S, S jest ciałem, S jest izomorficzne z $\mathbb{C}$. Zatem wszystkie zbiory typu S są izomorficzne jako ciała. $\mathbb{C}$ jest konkretnym modelem tej struktury, którą nazywamy ciałem liczb zespolonych. Istotnie $\mathbb{C}$ jest najmniejszym rozszerzeniem $\mathbb{R}$ zawierającym i. ■

Dalej zajmować się będziemy trenowaniem rachunków na liczbach zespolonych na różne sposoby. Okazuje się, że przyjęcie $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ (jako zbiór) dostarcza wygodnej geometrycznej interpretacji $\mathbb{C}$. Można np. patrzeć na działanie $+$ i $\cdot$ jako na operacje na płaszczyźnie. Można więc dużo rysować, co istotnie pomaga w rozumieniu.

CIAŁO $\mathbb{C}$ Z BLISKA

W naszym modelu ($\mathbb{C}$ jako płaszczyzna) każda liczba zespolona $z=x+iy$ odpowiada punktowi o pierwszej współrzędnej x a drugiej y. Będziemy mówić, że x to część rzeczywista liczby zespolonej: $x=\mathrm{Re}(z)$ a y to część urojona $y=\mathrm{Im}(z)$ Uwaga: część urojona jest liczbą rzeczywistą.

Wygodnie jest wprowadzić następującą notację: jeśli $z=x+iy$ to $\overline{z}=x-iy$. Liczbę $\overline{z}$ nazywamy sprzężoną do z, a operację „daszkowania" nazywamy sprzężeniem zespolonym. Operacja ta okazuje się bardzo przydatna upraszczając notację. Mamy na przykład

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

Wprost z definicji sprzężenie wynikają następujące własności operacji sprzężenia:

STWIERDZENIE (1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$, (2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2$, (3) $\overline{(z)^{-1}}=(\overline{z})^{-1}$,
(4) $(\overline{z})^n=\overline{(z^n)}$, (5) $\overline{\overline{z}}=z$ (6) $z\overline{z}=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$ (7) $z=\overline{z}\Rightarrow z\in\mathbb{R}$
(8) $\overline{z}=-z\Rightarrow z\in i\mathbb{R}$

DOWÓD: Przyjmijmy się jedynie niektórym punktom:

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x+iy)(a+ib)} = \overline{xa-yb+i(xb+ya)} = xa-yb-i(xb+ya)$ ⟷ $=$

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{(x+iy)}\cdot\overline{(a+ib)} = (x-iy)(a-ib) = xa-yb-iya-ixb = xa-yb-i(xb+ya)$

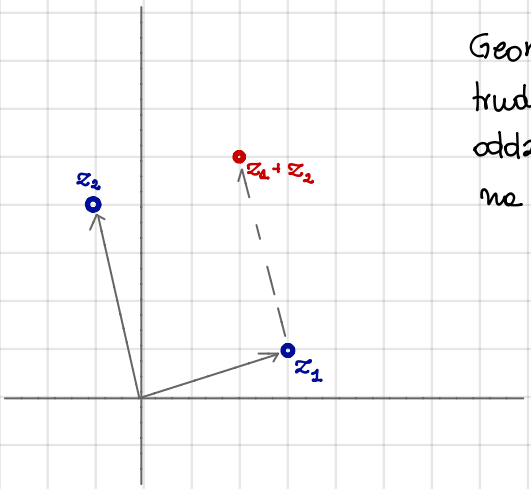
(3) Wiadomo, że $(z^{-1})z = 1$, zatem zgodnie z (2) $\overline{(z^{-1})z} = 1 = \overline{(z^{-1})}\,\overline{z}$. W tej sytuacji $\overline{(z^{-1})} = \frac{1}{\overline{z}} = (\overline{z})^{-1}$

(4) wynika z (2) powtarzanego n razy

(6) $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - iy + iy + y^2 = x^2+y^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

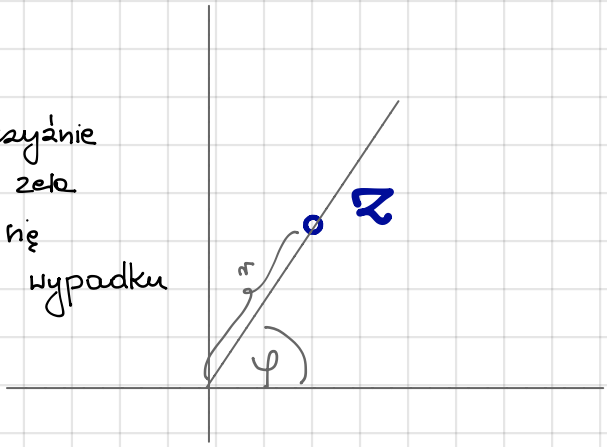
(7) $z = \overline{z}$ tzn $x+iy = x-iy \Rightarrow iy = -iy \Rightarrow y = -y \Rightarrow y = 0$.

Dlaczego wyróżniłam (6)? Dlatego, że przyszła pora na geometryczną interpretację operacji mnożenie i dodawanie w $\mathbb{C}$



Geometryczna interpretacja dodawania nie nastręcza trudności: dodajemy oddzielnie część rzeczywistą i oddzielnie urojoną, więc rzecz jest jak dodawanie wektorów na płaszczyźnie.

Żeby zinterpretować mnożenie posłużymy się szkołą geometrią



Liczbę zespoloną – punkt na płaszczyźnie opisać można podając odległość od zera i kąt od osi rzeczywistej. Umówmy się chwilowo, że $\varphi \in [0, 2\pi[$. W takim wypadku

$\mathrm{Re}\, z = x = r\cos\varphi$

$\mathrm{Im}\, z = y = r\sin\varphi$

$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

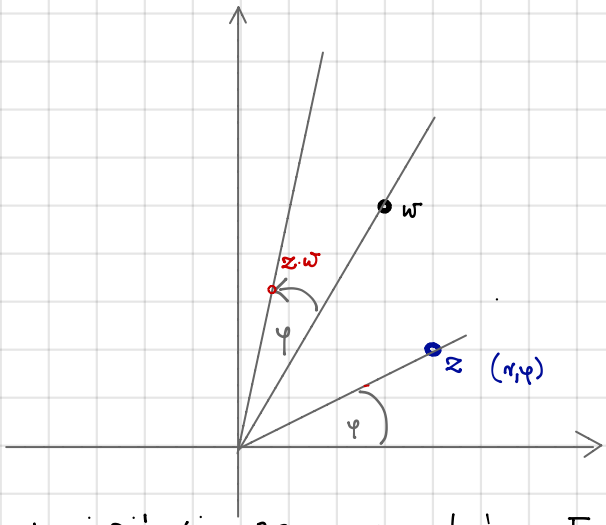
Weźmy teraz z_1 i z_2 z $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ odpowiednio. Mnożymy:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \quad (*)$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Geometrycznie rzecz biorąc mnożenie przez liczbę zespoloną $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ polega na przeskalowaniu (jak wskazuje r) i obrocie (jak wskazuje φ) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



Oczywiście dodając kąty φ_1 i φ_2 możemy wyskoczyć poza odcinek $[0, 2\pi[$. Nie jest to jednak niczym złym – zapis

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ pozostaje słuszny w tym sensie, że $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$ $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$ dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$

Nie przypisujemy więc liczbie z kąta φ w sposób jednoznaczny – każdy różniący się o wielokrotność 2π jest dobry. Można oczywiście umówić się że φ ma być z $[0, 2\pi[$ ale taka umowa byłaby bardzo niepraktyczna. Używanie współrzędnych r i φ jest ze to niezwykle praktyczne!

DEFINICJA Postać $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej. Liczbę r nazywamy **modułem** a liczbę φ **argumentem** liczby zespolonej. Wprowadzamy oznaczenie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Ten z argumentów, który należy do odcinka $[0, 2\pi[$ nazywamy argumentem głównym i oznaczamy $\mathrm{Arg}\, z$

STWIERDZENIE: Moduł liczby zespolonej jest funkcją $\mathbb{C} \ni z \longmapsto |z| \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mającą następujące własności:

(1) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ (2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (3) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ (4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(5) $|z| = 0 \iff z = 0$ (6) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ (7) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

DOWÓD (1), (2), (3) oczywisty rachunek, (4), (7) własności odległości na płaszczyźnie

(5) $\Leftarrow$ $z = 0$ oznacza $x = 0$ i $y = 0$, zatem $r^2 = x^2 + y^2 = 0$ i $r = |z| = 0$. $\Rightarrow$ jeśli $|z| = 0$ to $|z|^2 = 0$ i wtedy $0 = z\bar{z} = x^2 + y^2$. Liczby x^2 i y^2 są nieujemne, więc ich suma jest 0 jedynie gdy obie są 0, skąd $z = 0$. (6) sprawdzamy rachunkiem

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}_{\text{liczby wzajemnie sprzężone}} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$w + \bar{w} = 2\mathrm{Re}\, w$

Zauważmy, że nie dyskutujemy funkcji $z \longmapsto \arg z$. Wynika to z tego, że takiej funkcji nie ma. Istnieje relacja między elementami $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a elementami $\mathbb{R}$, którą można by nazwać arg. Istnieje ze to funkcja $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow [0, 2\pi[$ ale jest niewygodne.

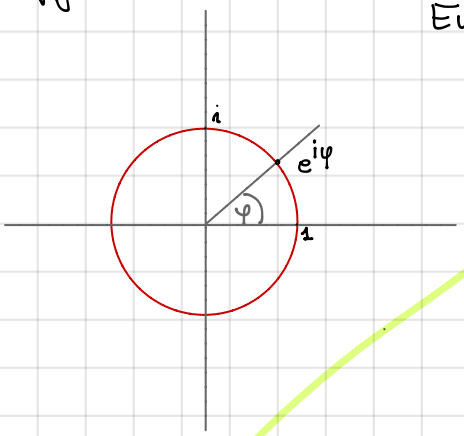
W ułatwianiu sobie życia pójdziemy jeszcze dalej wprowadzając pewne oznaczenie zwane **symbolem Eulera**

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Napis prawdopodobnie przypomina nieco wartość funkcji wykładniczej $\alpha \longmapsto e^{\alpha}$ dla $\alpha = i\varphi$. Przypomina całkiem słusznie, jednak nie jest to odpowiedni moment, żeby to dyskutować. Ważne są dla nas własności symbolu Eulera, które bardzo ułatwiają różne rachunki. Z samej

definicji wynika, że liczba $e^{i\varphi}$ ma moduł 1. Przebiegając wszystkie wartości φ przebiegamy wszystkie liczby o module 1 w $\mathbb{C}$. Geometrycznie liczby te tworzą okrąg o środku w 0 i promieniu 1. Wzór (*) daje nam podstawową własność symbolu Eulera:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} \quad (**)$$



z niego wynikają wszystkie inne pożyteczne wzory:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$$

$$(e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi}$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

Ten wzór zapisany w wersji trygonometrycznej a nie Eulerowskiej przyjmuje postać $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Dla liczb o module innym niż 1 mamy $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. Wzór ten nosi nazwę **Wzoru de Moivre'a**.

DYGRESJA STRUKTURALNA Niech S^1 oznacza zbiór liczb o module 1, tzn $S^1 = \{z : |z| = 1\}$

Zbiór ten jest zamknięty ze względu na mnożenie, zawiera element neutralny ze względu na mnożenie ($z = 1$), odwrotność liczby o module 1 też ma moduł 1. Mnożenie podlega z $\mathbb{C}$, spełnia więc też warunek łączności. Podsumowując mnożenie ograniczone do S^1 spełnia warunki M1–M4 z definicji ciała. Taka struktura algebraiczna nazywa się **grupą przemienną**. (Jeśli opuścimy M2 będzie po prostu **grupą**.) Grupą przemienną jest oczywiście $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$. Grupą jest omawiany przez nas V_4. Grupa nieprzemienna jeszcze się nie pojawiła, ale niechybnie się pojawi. Nasz najbardziej pożyteczny wzór (**) oznacza, że odwzorowanie

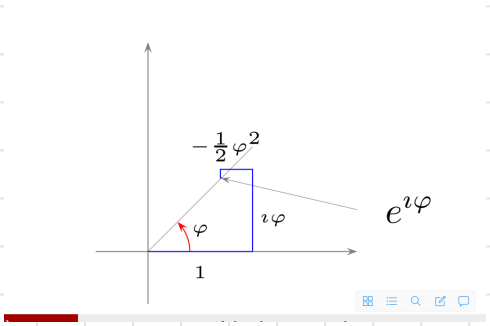
$\mathbb{R} \ni \varphi \longmapsto e^{i\varphi} \in S^1$ jest **homomorfizmem grup**, tzn zachowuje działanie (dodawanie w $\mathbb{R}$ przechodzi na mnożenie w S^1). Element neutralny w $\mathbb{R}$ (tzn 0) przechodzi na element neutralny w S^1 ($1 = e^{i\cdot 0}$) oraz element przeciwny przechodzi na odwrotny:

$$\varphi + (-\varphi) = 0 \rightsquigarrow 1 = e^{i(\varphi+(-\varphi))} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = e^{i\varphi}(e^{i\varphi})^{-1}$$

Niektórzy z państwa widzieli być może taki napis:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Wersje grzeczne dla e na zachętę



PIERWIASTKOWANIE

Przygodę z $\mathbb{C}$ zaczęliśmy od tego, że potrzebna nam była możliwość rozwiązywania równań postaci $x^2+1=0$. Wiemy już, że w $\mathbb{C}$ to równanie ma rozwiązanie $x=i$, łatwo sprowadzić, że także $x=-i$

$$x^2+1=(x-i)(x+i)$$

Każde równanie kwadratowe możemy teraz rozwiązać:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \qquad 0=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\overbrace{b^2-4ac}^{\Delta}}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

jeśli $\Delta<0$ to $\sqrt{\Delta}=i\sqrt{|\Delta|}$

$$x_1=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{\Delta}\right) \qquad x_2=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)$$

Konkluzja: w $\mathbb{C}$ każde równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania (czasem jedno podwójne jeśli $\Delta=0$.

A jak to jest z innymi wielomianami? Rozważymy najpierw wielomiany postaci $z^n=a$ dla $a\in\mathbb{C}$ (pierwiastkowanie liczb zespolonych) a potem zrobimy dłuższą wycieczkę w teorię wielomianów o współczynnikach z ciała.

PRZYKŁAD: $z^3=i$ $z=?$ użyjemy postaci biegunowej:

$$z=re^{i\varphi} \qquad z^3=r^3e^{3i\varphi} \qquad i=e^{i\pi/2} \qquad \Rightarrow \qquad r^3e^{3i\varphi}=e^{i\pi/2} \Rightarrow r^3=1 \Rightarrow r=1$$

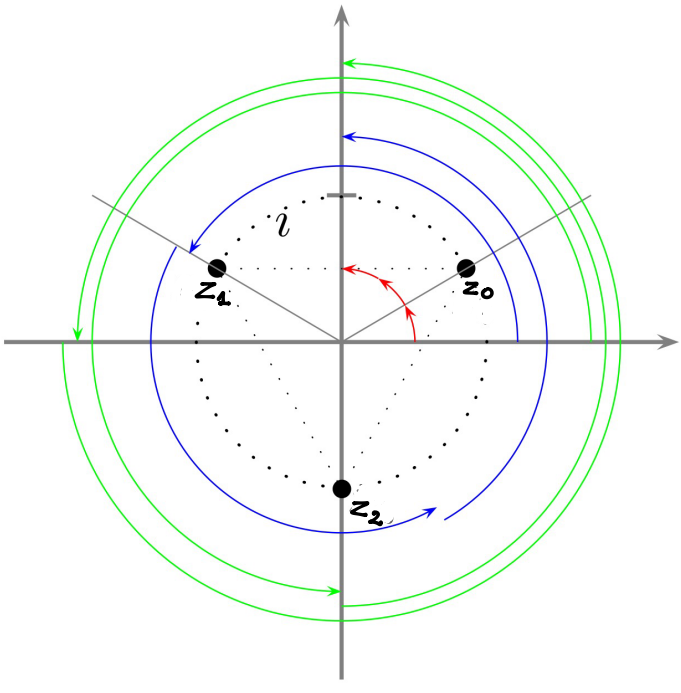
$$e^{3i\varphi}=e^{i\pi/2+2\pi ki} \qquad \varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$$

$k=0 \longrightarrow \varphi=\pi/6$

$k=1 \longrightarrow \varphi=\pi/6+2\pi/3=5\pi/6$

$k=2 \longrightarrow \varphi=\pi/6+4\pi/3=9\pi/6=3\pi/2$

$k=3 \longrightarrow \varphi=\pi/6+2\pi$



$$z_0=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$z_1=e^{i5\pi/6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$$

Obserwacja: Pierwiastki 3-go stopnia z i leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Nie jest to przypadek:

$$e^{i\pi/6 + \frac{2\pi}{3}ki} = e^{i\pi/6} \underbrace{e^{\frac{2\pi}{3}ki}}$$

Dla $k = 0,1,2$ są to pierwiastki trzeciego stopnia z 1.

$\varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi}{3}\cdot 1 i} \quad \varepsilon_2 = e^{\frac{2\pi}{3}\cdot 2 i}$. Pierwiastki z_1 i z_2 powstają z z_1 poprzez pomnożenie przez ε_1 i ε_2

STWIERDZENIE: Dla $z \neq 0$ istnieje n różnych pierwiastków stopnia n z z. Jeśli $z = re^{i\varphi}$ to pierwiastki z z są postaci

$$z_k = z_0 \varepsilon_k \quad \text{gdzie} \quad z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} \quad \text{a } \varepsilon_k \text{ są pierwiastkami stopnia } n \text{ z } 1, \text{ tzn } \varepsilon_k = e^{\frac{2\pi}{n}ki}, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

DOWÓD: Liczba $z_k = z_0\varepsilon_k$ jest pierwiastkiem z z, istotnie

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n} e^{2\pi/n\, ki}\right)^n = re^{i\varphi} \underbrace{e^{2\pi ki}}_{1} = re^{i\varphi} = z$$

Dla $k \neq l \quad k,l \in \{0,\dots,n-1\} \quad z_k \neq z_l$, istotnie

$$z_k = z_l \Rightarrow \sqrt[n]{r} z_0 \varepsilon_k = \sqrt[n]{r} z_0 \varepsilon_l \Rightarrow \varepsilon_k = \varepsilon_l \Rightarrow e^{2\pi/n\, ki} = e^{2\pi/n\, li} \Rightarrow \frac{2\pi}{n}k = \frac{2\pi}{n}l + 2\pi p$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{n}(k-l) = 2\pi p \Rightarrow \frac{k-l}{n} = p \Rightarrow k - l = pn$$

ale największa różnica między k i l dla $k,l \in \{0,\dots,n-1\}$ jest $n-1$ co do wartości bezwzględnej zatem nie może być wielokrotnością n. ■

SZCZEGÓLNE WŁASNOŚCI PIERWIASTKÓW Z 1

Ustalmy n i rozważmy $\{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = e^{2\pi/n\, i}, \dots, \varepsilon_k = e^{2\pi k/n\, i}, \dots, \varepsilon_{n-1} = e^{\frac{2\pi(n-1)}{n}i}\}$. Zauważmy, że iloczyn dwóch pierwiastków z jedynki też jest pierwiastkiem z jedynki. Podobnie odwrotność. ε_0 jest elementem neutralnym ze względu na mnożenie. Mnożenie jest łączne (jak w całym $\mathbb{C}$)

STWIERDZENIE Zbiór pierwiastków n-tego stopnia z 1 wraz z mnożeniem jest grupą.

Zbiór $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ jest generowany przez ε_1 w tym sensie, że $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ dla $k = 1,\dots,n-1$. $\varepsilon_1^n = 1$. każdy element zbioru jest więc potęgą ε_1. ĆWICZENIE: wykazać, że zbiór pierwiastków n-tego stopnia z 1 jest generowany przez ε_k w powyższym sensie wtedy i tylko wtedy gdy k i n są względnie pierwsze.

Geometrycznie rzecz biorąc pierwiastki n-tego stopnia z 1 leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego, którego jednym z wierzchołków jest 1.