ALGEBRA R20

STRUKTURA ENDOMORFIZMU

- operatory nilpotentne C.D.
- Wymiar p.p. pierwiastkowej
- rozkład $F = D + N$

Podprzestrzeń $\langle v, Nv, \dots, N^{k-1}v\rangle$ jest niezmiennicza, gdyż

$$N\langle v, Nv, \dots, N^{k-1}v\rangle \subset \langle v, Nv, \dots, N^{k-1}v\rangle \quad \blacksquare$$

Podprzestrzeń jak w powyższym stwierdzeniu nazywa się podprzestrzenią cykliczną dla N.

STWIERDZENIE: Przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni cyklicznych dla N.
DOWÓD: Dowód indukcyjny względem wymiaru przestrzeni V

(1) $\dim V = 1$ W takim przypadku jedyny operator nilpotentny to operator zerowy. przestrzeń V jest wtedy całą przestrzenią cykliczną

(2) Założenie indukcyjne: tw. jest spełnione dla przestrzeni wymiaru $n-1$

(3) V: $\dim V = n$. Jeśli N jest nilpotentny to $\operatorname{im} N \subsetneq V$. Weźmy podprzestrzeń $\mathcal{U}$ wymiaru $n-1$ zawierającą $\operatorname{im} N$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r \qquad \mathcal{U}_i \text{ jest cykliczna dla } N|_{\mathcal{U}}$$

Weźmy teraz $v \in V \setminus \mathcal{U}$ wtedy $Nv \in \operatorname{im} N \subset \mathcal{U}$. Wektor Nv można więc Nv rozłożyć na składowe w $\mathcal{U}_i$

$$Nv = u_1 + u_2 + \dots + u_r \qquad u_i \in \mathcal{U}_i$$

Element $u_i \in \mathcal{U}_i$ może być elementem o największej wysokości w $\mathcal{U}_i$, albo może mieć wysokość mniejszą. Jeśli u_i ma największą wysokość to kładziemy $w_i = 0$. Jeśli u_i ma wysokość mniejszą to $u_i = Nw_i$ dla pewnego $w_i \in \mathcal{U}_i$

Weźmy teraz $v - \sum_{i=1}^{r} w_i = v'$ $\qquad Nv' = Nv - \sum_{i=1}^{r} Nw_i = u_1 + \dots + u_r - Nw_1 - \dots - Nw_r$

te wektory są albo zero albo u_i

Wektor v' ma tę własność, że Nv' rozkłada się na składowe w $\mathcal{U}_i$ które są wektorami o największej wysokości w $\mathcal{U}_i$. Ewentualnie $Nv' = 0$ jeśli wszystkie w_i były niezerowe. Rozważmy oddzielnie przypadki $Nv' = 0$ i $Nv' \neq 0$

$Nv' = 0$ Przestrzeń $\langle v'\rangle$ jest cykliczna wymiaru 1. $\langle v'\rangle \cap \mathcal{U}_i = \{0\}$, zatem

$$V = \langle v'\rangle \oplus \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r \text{ jest szukanym rozkładem.}$$

$Nv' \neq 0$ W rozkładzie Nv' na składowe $u_1' + u_2' + \dots + u_r'$ wybieramy składową o największej wysokości. Bez straty ogólności możemy uznać, że jest to u_1 (ewentualnie można przenumerować). Pokażemy, że

$$V = \langle v', Nv', \dots, N^{m}v'\rangle \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots + \oplus \mathcal{U}_r \quad \text{gdzie} \quad m = \dim \mathcal{U}_1$$

Sprawdzimy, że $\langle v', Nv', \dots, N^{m}v'\rangle \cap \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r = \{0\}$

Załóżmy, że $\underbrace{\alpha_0 u'}_{\notin \mathcal{U}} + \underbrace{\alpha_1 N u'}_{\in \operatorname{im} N \subset \mathcal{U}} + \dots + \alpha_m \underbrace{N^m u'}_{\in \operatorname{im} N \subset \mathcal{U}} \in \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$

$\Longrightarrow$

$\alpha_0 = 0$

$$\alpha_1 N u' + \dots + \alpha_m N^{m-1} N u' = \alpha_1 (u_1' + \dots + u_r') + \alpha_2 (N u_1' + \dots + N u_r') + \dots + \alpha_m N^{m-1} (u_1' + \dots + u_r') =$$

$N u' = u_1' + \dots + u_r'$

$$= \underbrace{(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 N u_1' + \dots + \alpha_m N^{m-1} u_1')}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{\text{reszta}}_{\in \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r}$$

tu jest suma prosta

Ponieważ $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$ to $\alpha_1 u_1' + \alpha_2 N u_1' + \dots + \alpha_m N^{m-1} u_1' = 0$ ale $u_1, N u_1', \dots, N^{m-1} u_1'$ są liniowo niezależne zatem $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.
Wykazaliśmy że przecięcie $\langle v', N v', \dots, N^m v' \rangle$ z $\mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$ jest zerowe.
Policzmy wymiary

$$\dim \left(\langle v', N v', \dots, N^m v' \rangle + \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r \right) = \dim \langle \cdot \rangle + \dim (\oplus \cdots \oplus) - \dim (\langle \cdot \rangle \cap \oplus \cdots \oplus) =$$

$$= \underbrace{m+1}_{\dim \mathcal{U}_1} + \dim \mathcal{U}_2 + \dots + \dim \mathcal{U}_r - 0 = \dim \mathcal{U}_1 + \dots + \dim \mathcal{U}_r + 1 = \dim \mathcal{U} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

Wymiary sumy $\langle v', N v', \dots, N^m v' \rangle + \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$ i przestrzeni V się zgadzają, ponadto przecięcie jest zerowe, suma jest więc prosta. ∎

Powyższe stwierdzenie ma fundamentalne znaczenie dla badania struktury operatora nilpotentnego. Podsumujmy zebrane informacje:

(1) $\operatorname{Sp} N = \{0\}$

(2) $V = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}_i$ są cykliczne tzn $\mathcal{U}_i = \langle v_i, N v_i, \dots, N^{m_i - 1} v_i \rangle$ gdzie $m_i = \dim \mathcal{U}_i$

Biorąc układ $(v_1, N v_1, \dots, N^{m_1 - 1} v_1, v_2, N v_2, \dots, v_r, N v_r, \dots, N^{m_r - 1} v_r)$ jako bazę b w V otrzymujemy macierz N w postaci blokowej:

$$[N]_b^b = \left[\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \text{i td}
\end{array}\right]$$

Każdy blok ma zera na diagonali i jedynki nad diagonalą.

Jak stwierdzić ile jest bloków? Zauważmy, że wektory $N^{m_i - 1} v_i$ należą do jądra N. Jądro jest jednocześnie przestrzenią własną. $r = \dim \ker N$

WYMIAR PODPRZESTRZENI PIERWIASTKOWEJ

Powróćmy do operatora F. Jego wielomian charakterystyczny to

$$w_F(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{k_p}(-1)^n$$

Z faktu że $w_F(F)=0$ wywnioskowaliśmy, że V rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni pierwiastkowych

$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ z których każda ma postać $\ker(F-\lambda_i\, id_V)^{k_i}$

Operator $(F-\lambda_i\, id_V)$ obcięty do V_i ma postać $F|_{V_i} - \lambda_i\, id_{V_i}$ i jest na V_i operatorem nilpotentnym stopnia k_i. Oznaczmy go N_i.
Wielomian charakterystyczny operatora N_i ma więc postać $w_{N_i}(t) = (-1)^{\dim V_i} t^{\dim V_i} =$
$= \det(N_i - t\, id_{V_i})$

$$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{k_p} = w_F(\lambda) = \det(F-\lambda\, id_V) = \prod_{i=1}^{p} \det\left(F|_{V_i} - \lambda\, id_{V_i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{p} \det\left(N_i + \lambda_i\, id_{V_i} - \lambda\, id_{V_i}\right) =$$

$F|_{V_i} = N_i + \lambda_i\, id_{V_i}$

$$= \prod_{i=1}^{p} \det\left(N_i - (\lambda-\lambda_i)\, id_{V_i}\right) = \prod_{i=1}^{p} w_{N_i}(\lambda-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{p} (-1)^{\dim V_i}(\lambda-\lambda_i)^{\dim V_i} =$$

$$= (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (\lambda-\lambda_i)^{\dim V_i}$$

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{k_p} = (\lambda-\lambda_1)^{\dim V_1} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{\dim V_p}$$

$\Rightarrow$ $\dim V_i = k_i$ przestrzeń pierwiastkowa ma wymiar równy krotności wartości własnej.

BAZA JORDANA

Mamy już teraz wszystkie informacje potrzebne do skonstruowania wygodnej bazy dla każdego operatora na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej:

(1) Znajdujemy rozkład V na sumę podprzestrzeni pierwiastkowych

(2) Na każdej podprzestrzeni pierwiastkowej pracujemy oddzielnie:

$$F|_{V_i} = F|_{V_i} - \lambda_i\, id_{V_i} + \lambda_i\, id_{V_i} = \underbrace{\lambda_i\, id_{V_i}}_{\text{diagonalny}} + \underbrace{N_i}_{\text{nilpotentny}}$$

We wszystkich bazach $\lambda_i\, id_{V_i}$ ma taką samą macierz $\lambda_i \mathbb{1}$, szukamy więc bazy dla N_i tak jak dla operatora nilpotentnego znajdując rozkład V_i na podprzestrzenie cykliczne. Liczba elementów rozkładu jest równa $\dim\ker N_i = \dim\ker(F-\lambda_i\, id)$ czyli wymiarowi podprzestrzeni własnej dla wartości własnej λ_i. W bazie odpowiedniej dla operatora N_i macierz $F|_{V_i}$ ma postać blokową a bloki są postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Zbierając razem elementy baz na przestrzeniach V_i w jedną bazę przestrzeni V otrzymujemy bazę Jordana przestrzeni V dla operatora F. Macierz operatora w tej bazie nazywa się postacią Jordana operatora F.

Dodatkowo możemy każdy z operatorów N_i rozszerzyć z V_i na V kładąc 0 na pozostałych składnikach sumy prostej. Takie rozszerzenie oznaczmy $\bar{N}_i$. Innymi słowy $\bar{N}_i = N_i P_i$, podobnie $\bar{D}_i = D_i P_i = \lambda_i P_i$.

$$F = \bar{N}_1 + \bar{D}_1 + \bar{N}_2 + \bar{D}_2 + \cdots + \bar{N}_p + \bar{D}_p = \underbrace{(\bar{D}_1 + \cdots + \bar{D}_p)}_{D} + \underbrace{(\bar{N}_1 + \cdots + \bar{N}_p)}_{N} = D + N$$

gdzie D jest diagonalizowalny a N nilpotentny. Prawdziwe jest twierdzenie:

TWIERDZENIE Każdy endomorfizm F skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej rozkłada się na sumę $F = D+N$ operatorów diagonalizowalnego i nilpotentnego, takich, że $[D,N]=0$. Rozkład ten jest jednoznaczny.

DOWÓD Właściwie niewiele już zostało do udowodnienia: Pokazaliśmy że przestrzeń V rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych dla operatora F. Każda z tych podprzestrzeni jest podprzestrzenią pierwiastkową. Na podprzestrzeni pierwiastkowej F można rozłożyć na sumę operatora diagonalnego (mnożenie przez wartość własną) i nilpotentnego. Operatory te, rozszerzone przez zero na pozostałych składnikach sumy zbierają się do operatora diagonalizowalnego i nilpotentnego na V: $F = D+N$. Pozostaje wykazanie, że operatory te komutują, oraz że rozkład jest jednoznaczny.

Przemienność D i F wynika z faktu, że D_i i N_i (w poprzednich oznaczeniach) są przemienne na V_i. D_i jest proporcjonalny do identyczności na V_i, zatem jest przemienny ze wszystkimi operatorami na V_i. Podprzestrzenie V_i są niezmiennicze także dla D_i i N_i, i co za tym idzie, dla D i N, zatem przemienność D_i i N_i skutkuje przemiennością D i N.

Jednoznaczność rozkładu: Niech $F = D+N$. Skoro operator D jest diagonalizowalny to jego podprzestrzenie pierwiastkowe są jednocześnie własne. Niech $\lambda \in Sp(D)$ i niech $V(\lambda)$ będzie podprzestrzenią własną dla D

$v \in V(\lambda)$ $Dv = \lambda v$ wtedy $V(\lambda)$ jest niezmiennicza dla F:

$D(F(v)) = F(D(v)) = F(\lambda v) = \lambda F(v)$ tzn $F(v) \in V(\lambda)$. Skoro $N = F - D$, to $V(\lambda)$ jest też niezmiennicza dla N.

Weźmy znowu $v \in V(\lambda)$ $F(v) = D(v) + N(v) = \lambda v + N(v)$ $(F - \lambda\, id)v = N(v)$