ALGEBRA R 26

Operatory unitarne cd.
operatory hermitowskie

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ W przypadku zespolonym każdej wartości własnej odpowiada przynajmniej jednowymiarowa przestrzeń własna. Jeśli więc $\lambda \in Sp(\mathcal{U})$ i v jest taki, że $\mathcal{U}v = \lambda v$ to mamy

$$\|v\|^2 = \|\mathcal{U}v\|^2 = \|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v | \lambda v \rangle = \bar{\lambda}\lambda \|v\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Wartości własne operatorów unitarnych mają moduł 1.

TWIERDZENIE Dla operatora unitarnego $\mathcal{U}$ na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej nad $\mathbb{C}$ istnieje ortonormalna baza wektorów własnych.

DOWÓD: Oznaczamy $n = \dim V$. Weźmy $\lambda \in Sp(\mathcal{U})$ i v_1: $\mathcal{U}v_1 = \lambda v_1$. Zdefiniujmy także podprzestrzeń $W_1 \subset V$: $W_1 = \langle v_1 \rangle^\perp$. Podprzestrzeń W_1 jest niezmiennicza dla $\mathcal{U}$:

$w \in W_1$ tzn $\langle v_1 | w \rangle = 0$ Obliczmy $\langle v_1 | \mathcal{U}w \rangle = \langle \mathcal{U}^+ v_1 | w \rangle =$
$\langle \mathcal{U}^{-1} v_1 | w \rangle = \langle \frac{1}{\lambda} v_1 | w \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle v_1 | w \rangle = 0$ tzn $\mathcal{U}w \in W$. Mamy więc rozkład

$V = \langle v_1 \rangle \oplus W_1$ i jest to rozkład na wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie niezmiennicze. Całą procedurę możemy powtórzyć dla $\mathcal{U}|_{W_1}$ konstruując $W_1 = \langle v_2 \rangle \oplus W_2$ gdzie $W_2 = \langle v_2 \rangle^\perp$ w W_1 uzyskując

$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus W_2$ $\dim W_2 = n-2$

Postępujemy tak dalej aż otrzymujemy W_{n-1}: $\dim W_n = 1$ $W_{n-1} = \langle v_n \rangle$

Ostatecznie

$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$, każdy z v_i jest $\perp$ do pozostałych.

Każdy z nich jest też własny. Bazę ortonormalną (e_i) uzyskujemy kładąc $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. ∎

Podsumowując: operator unitarny jest diagonalizowalny. Wartości własne mają moduł 1. Wektory własne dla różnych wartości własnych są wzajemnie prostopadłe.

Zbiór operatorów unitarnych na $\mathbb{C}^n$ oznaczamy $\mathcal{U}(n)$. Jest to grupa (Liego) względem mnożenia macierzy. Grupę tę nazywamy grupę unitarną. Wyróżniona jest w niej pewna podgrupa macierzy unitarnych o wyznaczniku 1, oznaczana $SU(n)$ i nazywana grupą specjalną unitarną.

Teraz odpowiednie twierdzenie dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

TWIERDZENIE Jeśli V jest rzeczywistą p.w. z iloczynem skalarnym $\dim V<\infty$ a O jest operatorem ortogonalnym to istnieje ortonormalna baza w V w której macierz operatora O ma postać

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & & & & \\ & -\mathbb{1} & & & \\ & & O(\varphi_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & O(\varphi_k) \end{bmatrix}$$

gdzie $O(\varphi)$ jest dwuwymiarową macierzą obrotu

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

DOWÓD: Rozpatrzmy $V^{\mathbb{C}}$ z następującym iloczynem skalarnym

$$\langle v+iw|v'+iw'\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v|v'\rangle + \langle w|w'\rangle + i\left(\langle v|w'\rangle - \langle w|v'\rangle\right)$$

bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że forma $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ jest $3/2$ liniowa i spełnia $\langle u|u'\rangle = \overline{\langle u'|u\rangle}$.

$$O^{\mathbb{C}}(v+iw) = Ov + iOw$$

$$\langle v+iw|Ov'+iOw'\rangle = \langle v|Ov'\rangle + \langle w|Ow'\rangle + i\left(\langle v|Ow'\rangle - \langle w|Ov'\rangle\right) =$$

$$= \langle O^{+}v|v'\rangle + \langle O^{+}w|w'\rangle + i\left(\langle O^{+}v|w'\rangle - \langle O^{+}w|v'\rangle\right) =$$

$$= \langle O^{-1}v|v'\rangle + \langle O^{-1}w|w'\rangle + i\left(\langle O^{-1}v|w'\rangle - \langle O^{-1}w|v'\rangle\right) =$$

$= \langle O^{-1}v+iO^{-1}w|v'+iw'\rangle = \langle (O^{\mathbb{C}})^{-1}(v+iw)|v'+iw'\rangle$ tzn $(O^{\mathbb{C}})^{-1} = (O^{\mathbb{C}})^{+}$ czyli $O^{\mathbb{C}}$ jest operatorem unitarnym. Obowiązuje go zatem twierdzenie poprzednie, tzn jest to operator diagonalizowalny nad $\mathbb{C}$, można wybrać bazę ortonormalną diagonalizującą oraz $\lambda\in Sp(O^{\mathbb{C}}) \Rightarrow |\lambda|=1$. Wiadomo ponadto, że $Sp(O^{\mathbb{C}}) = Sp(O)$. Wartości własne O to zatem $+1, -1$ lub $e^{i\varphi}$. Jeśli

zaś $e^{i\varphi} \in Sp(\Theta)$ to $e^{-i\varphi} \in Sp(\Theta)$. Weźmy więc bazę ortonormalną $V^{\mathbb{C}}$ diagonalizującą $\Theta^{\mathbb{C}}$. Każdy z elementów bazy odpowiada wartości własnej. Wiadomo także że jeśli $\lambda \in Sp(\Theta) \cap \mathbb{R}$ to podprzestrzeń niezmiennicza dla λ w $V^{\mathbb{C}}$ jest postaci $W^{\mathbb{C}}$ dla $W \subset V$, W niezmiennicze dla Θ.
Wektory własne odpowiadające wartości własnej 1 można wybrać więc tak, aby miały one postać $v + i\vec{0}$. Bazę tę można dalej zortonormalizować.
Podobnie rzecz się ma z $\lambda = -1$.
Jeśli teraz $\lambda = e^{i\varphi}$ $\varphi \neq 0, \pi$ to $\bar{\lambda} = e^{-i\varphi}$ także jest wartością własną i wektory u_+, u_- : $\Theta^{\mathbb{C}} u_+ = e^{i\varphi} u_+$ $\Theta^{\mathbb{C}} u_- = e^{-i\varphi} u_-$ są prostopadłe względem $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$
Wiadomo, że można wziąć $u_- = \overline{u_+}$, tzn

$$u_+ = v + iw \qquad u_- = v - iw$$

Wiadomo, że $\langle v + iw | v - iw \rangle_{\mathbb{C}} = 0 = \langle v | v \rangle - \langle w | w \rangle + i\left(-\langle v | w \rangle - \langle w | v \rangle\right) =$
$\|v\|^2 - \|w\|^2 - 2i\langle v | w \rangle$ zatem $\|v\| = \|w\|$ i $\langle v | w \rangle = 0$. Można więc wybrać $u_+ u_-$ takie że $\|v\| = \|w\| = 1$

$\langle v, w \rangle$ jest niezmiennicze ze względu na Θ, $v \perp w$ oraz

$$\Theta(v + iw) = \Theta v + i\Theta w = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(v + iw) = (\cos\varphi\, v - \sin\varphi\, w) + i(\sin\varphi\, v + \cos\varphi\, w)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \Theta v &= \cos\varphi\, v - \sin\varphi\, w \\ \Theta w &= \sin\varphi\, v + \cos\varphi\, w \end{aligned} \qquad [\Theta]^{(v,w)}_{(v,w)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

■

Wniosek Operator ortogonalny działający na rzeczywistej przestrzeni wektorowej daje rozkład tej przestrzeni na podprzestrzenie niezmiennicze na których działa jako 1, -1 lub obrót o kąt φ. Obrotom odpowiadają podprzestrzenie dwuwymiarowe. W szczególności prowadzi to do wniosku, że każde ortogonalne odwzorowanie na $\mathbb{R}^3$ o wyznaczniku 1 jest obrotem wokół jakiejś osi.

Grupa macierzy ortogonalnych: $O(n)$ z wyznacznikiem 1 : $SO(n)$

ODWZOROWANIA HERMITOWSKIE

TWIERDZENIE Niech $P \in End(V)$ będzie rzutem. Równoważne są warunki

(1) $\ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$ (2) $\forall w, v \in V \quad \langle v | Pw \rangle = \langle Pv | w \rangle$

DOWÓD

(1) ⇒ (2) Warunek (1) oznacza, że P jest rzutem ortogonalnym, zatem $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Weźmy dowolne wektory v, w i rozłóżmy na składowe w przestrzeniach $\ker P$ i $\operatorname{im} P$

$$v = \underbrace{Pv}_{\operatorname{im} P} + \underbrace{(v - Pv)}_{\ker P} \qquad w = Pw + (w - Pw)$$

$$\langle v | Pw \rangle = \langle Pv + (v - Pv) | Pw \rangle = \langle Pv | Pw \rangle + \underbrace{\langle v - Pv | Pw \rangle}_{=0} =$$

$$= \langle Pv | Pw \rangle + \underbrace{\langle Pv | w - Pw \rangle}_{=0} = \langle Pv | Pw + w - Pw \rangle = \langle Pv | w \rangle$$

(2) ⇒ (1) Skoro P jest rzutem, to $V = \operatorname{im} P \oplus \ker P$ i rozkład $v = Pv + (v - Pv)$ jest zgodny z rozkładem na sumę prostą. Mamy pokazać że $(\ker P) = (\operatorname{im} P)^{\perp}$

$v \in \operatorname{im} P \quad w \in \ker P \qquad \langle v | w \rangle = \langle Pv | w \rangle = \langle v | Pw \rangle = 0$ ■

$\Downarrow$

$v = Pv$

Rzut ortogonalny jest operatorem hermitowskim!

STWIERDZENIE: Wartości własne hermitowskiego endomorfizmu są rzeczywiste

DOWÓD: Załóżmy najpierw, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wówczas każdej wartości własnej $\lambda \in Sp F$ odpowiada przynajmniej jednowymiarowa przestrzeń własna.

Weźmy więc v: $\|v\| = 1 \quad Fv = \lambda v$

$$\langle v | Fv \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \lambda \langle v | v \rangle = \lambda$$

$$\langle F^{+} v | v \rangle = \langle Fv | v \rangle = \langle \lambda v | v \rangle = \bar{\lambda}$$

$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Dla $K=\mathbb{R}$ wprowadzamy w $V^{\mathbb{C}}$ iloczyn skalarny jak poprzednio $\langle u|u'\rangle = \langle v+iw|v'+iw'\rangle = \langle v|v'\rangle + \langle w|w'\rangle + i(\langle v|w'\rangle - \langle w|v'\rangle)$ i pokazujemy, że jeśli $F^{+}=F$ to $(F^{\mathbb{C}})^{+}=F^{\mathbb{C}}$. Biorąc pod uwagę że $Sp(F^{\mathbb{C}})=Sp(F)$ dostajemy tezę. ■

Zauważmy że dla p.w. nad $\mathbb{R}$ fakt, że nie każdej wartości własnej odpowiada wektor własny związany był z tym, że wartości własne mogą być zespolone. Skoro już wiemy, że dla operatorów hermitowskich spektrum jest rzeczywiste, możemy używać w dowodach wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym, gdyż wiadomo, że przynajmniej jeden w. własny istnieje zawsze.

TWIERDZENIE SPEKTRALNE DLA OPERATORÓW HERMITOWSKICH

Jeśli V jest p.w. z iloczynem skalarnym i $\dim V<\infty$ oraz $F\in End(V)$ jest hermitowski, to istnieje baza ortonormalna V złożona z wektorów własnych F.

DOWÓD: Weźmy dowolną wartość własną $\lambda\in Sp(F)$ i wektor własny v odpowiadający tej wartości własnej. Wtedy $V=\langle v\rangle\oplus W$ gdzie $W=\langle v\rangle^{\perp}$, $\dim W=\dim V-1$. Pokażemy, że W jest F-niezmiennicze.

$w\in W=\langle v\rangle^{\perp}$, tzn $\langle w|v\rangle = 0 = \langle w|\lambda v\rangle = \langle w|Fv\rangle = \langle F^{+}w|v\rangle = \langle Fw|v\rangle$, tzn $Fw\in\langle v\rangle^{\perp}$.

Możemy więc dociąć $F|_W$ i rozpatrywać to docięcie jako hermitowski operator na W. Postępując indukcyjnie otrzymujemy ortogonalną bazę w V, po unormowaniu ortonormalną. ■

WNIOSKI:

(1) Wymiar przestrzeni własnej dla operatora hermitowskiego jest równy krotności wartości własnej.

(2) Oznaczamy $E(\lambda)$ rzut ortogonalny na przestrzeń własną $V(\lambda)$, wtedy

$$F=\underbrace{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k E(\lambda_k)}_{\text{Rozkład spektralny operatora } F} \qquad \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}=Sp(F)$$