ALGEBRA R 27

Operatory hermitowskie cd
Operatory normalne
Przykład

STWIERDZENIE: $F, G \in End(V)$ $\quad F^+ = F,\ G^+ = G,\ FG = GF$ Istnieje baza ortonormalna diagonalizująca F i G jednocześnie.

DOWÓD: Weźmy rozkład $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r)$ dla operatora F. Wiadomo, że dla $i \neq j$ $V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j)$ oraz $V(\lambda_i) = \ker(F - \lambda_i\, id_V)$

Każda z przestrzeni $V(\lambda_i)$ jest G-niezmiennicza – istotnie: $v \in V(\lambda_i)$, tzn $Fv = \lambda_i v$ wtedy $FGv = GFv = G\lambda_i v = \lambda_i Gv$ zatem $Gv \in V(\lambda_i)$. $G|_{V(\lambda_i)}$ jest hermitowski, zatem ma bazę ortonormalną. Suma tych baz po wszystkich i daje szukaną wspólną ortonormalną bazę. ∎

STWIERDZENIE Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią z iloczynem skalarnym $\dim V < \infty$. Istnieje kanoniczna bijekcja między formami kwadratowymi na V a zbiorem hermitowskich endomorfizmów V.

DOWÓD: $F \in End(V)$ $\quad F^+ = F$. Wtedy $v \longmapsto \langle v | Fv \rangle$ jest formą kwadratową.
Istotnie, $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(v,w) = \langle v | Fw \rangle$ jest dwuliniowa i symetryczna:

$$f(w,v) = \langle w | Fv \rangle = \langle F^+ w | v \rangle = \langle Fw | v \rangle = \langle v | Fw \rangle = f(v,w)$$

zatem $v \longmapsto \langle v | Fv \rangle$ jest odpowiednią formą kwadratową.
Weźmy teraz $q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ – forma kwadratowa odpowiadająca $Q: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ formie dwuliniowej symetrycznej. Rozważmy odwzorowanie

$F_q: V \longrightarrow V$ takie że $F_q(v) = R^{-1}(Q(v,\cdot))$ gdzie $R: V \longrightarrow V^*$ jest izomorfizmem Riesa, tzn $R(v) = \langle v | \cdot \rangle$. Mamy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ więc R jest liniowy.
Pokażemy, że F_q jest hermitowskie

$$\langle v | F_q(w) \rangle = \langle v | R^{-1}(Q(w,\cdot)) \rangle = \langle R^{-1}(Q(w,\cdot)) | v \rangle = \langle Q(w,\cdot), v \rangle = Q(w,v)$$

$$\langle F_q^+(v) | w \rangle = \langle F_q(v) | w \rangle = \langle R^{-1}(Q(v,\cdot)) | w \rangle = \langle Q(v,\cdot), w \rangle = Q(v,w)$$

∎

WNIOSEK: Formie kwadratowej odpowiada macierz symetryczna, macierz tę można zdiagonalizować szukając wektorów własnych – jest to jeszcze jeden sposób znajdowania bazy diagonalizującej formę kwadratową.

OPERATORY NORMALNE

Operatory hermitowskie i unitarne są przykładami operatorów normalnych, tzn takich, że $F^*F = FF^*$. Okazuje się że, przynajmniej dla $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ wystarczy ta własność aby udowodnić odpowiednie twierdzenie spektralne.

TWIERDZENIE SPEKTRALNE DLA OPERATORÓW NORMALNYCH:

$\dim V<\infty$ $\quad F\in \mathrm{End}(V)$ $\quad F^+F = FF^+$ $\quad Sp(F)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ $\quad \lambda_i\neq\lambda_j$

$V(\lambda_i)= \ker(F-\lambda_i\, id_V)$

(1) Podprzestrzenie $V(\lambda_i)$ i $V(\lambda_j)$ są wzajemnie ortogonalne dla $i\neq j$

(2) Jeśli $E(\lambda_i)$ oznacza rzut ortogonalny na $V(\lambda_i)$ to

$$F = \lambda_1 E(\lambda_1)+\dots+\lambda_r E(\lambda_r)$$

DOWÓD:

Jedną z wcześniej dowodzonych własności operacji sprzężenia jest $sp(F^+)=\overline{sp(F)}$, tzn jeśli λ jest wartością własną dla F to $\bar\lambda$ jest wartością własną dla F^+. A jak się mają do siebie przestrzenie własne? Ogólnie rzecz biorąc nijak, ale jeśli założymy że F jest normalny to okazuje się, że przestrzenie własne się pokrywają

LEMAT: Jeśli F normalny to $\|Fx\| = \|F^+x\|$ DOWÓD:

$$\|Fx\|^2 = \langle Fx|Fx\rangle = \langle F^+Fx|x\rangle = \langle FF^+x|x\rangle = \langle F^+x|F^+x\rangle = \|F^+x\|^2$$

Niech teraz $v\in\ker(F-\lambda\, id)$ wtedy $\|(F-\lambda\, id)v\|=0$ $\quad F-\lambda\, id$ jest normalny, podobnie jak F, i $(F-\lambda\, id)^+ = F^+-\bar\lambda\, id$. Mamy więc $0=\|(F-\lambda\, id)v\| = \|(F^+-\bar\lambda\, id)v\|$ czyli $v\in\ker(F^+-\bar\lambda\, id)$, tzn v jest własny dla $\bar\lambda$.

Weźmy teraz $v\in V(\lambda_i)$, $w\in V(\lambda_j)$ $\quad i\neq j$

$$\lambda_j\langle v|w\rangle = \langle v|\lambda_j w\rangle = \langle v|Fw\rangle = \langle F^+v|w\rangle = \langle\bar\lambda_i v|w\rangle = \lambda_i\langle v|w\rangle$$

$$\underbrace{(\lambda_i-\lambda_j)}_{\neq 0}\langle v|w\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad v\perp w.$$

Pokazaliśmy (1) $V(\lambda_i)\perp V(\lambda_j)$

Niech teraz $E(\lambda_i)$ oznacza rzut ortogonalny na $V(\lambda_i)$. Skoro $V(\lambda_i) \perp V(\lambda_j)$ to $E(\lambda_i)E(\lambda_j) = 0 = E(\lambda_j)E(\lambda_i)$

Pokażemy teraz że $[E(\lambda_i), F] = 0$. Weźmy $v \in V$: $v = \underbrace{(v - E(\lambda_i)v)}_{\in V(\lambda_i)^\perp} + \underbrace{E(\lambda_i)v}_{\in V(\lambda_i)}$

wzajemnie prostopadłe

Weźmy $u \in V(\lambda_i)$ i policzmy

$$\langle u | F(v - E(\lambda_i)v)\rangle = \langle F^+ u | v - E(\lambda_i)v\rangle = \langle \bar{\lambda}_i u | v - E(\lambda_i)v\rangle = \lambda_i \langle u | v - E(\lambda_i)v\rangle$$

$= 0$. tzn $F(v - E(\lambda_i)v) \in V(\lambda_i)^\perp$

$$E(\lambda_i)F(v - E(\lambda_i)v) = 0 = F\,E(\lambda_i)(v - E(\lambda_i)(v))$$

Tzn T przemienny z $E(\lambda_i)$ na $V(\lambda_i)^\perp$

oczywiście dla $u \in V(\lambda_i)$ $Fu = \lambda_i u$ i $E(\lambda_i)Fu = \lambda_i u = F\,E(\lambda_i)u$

zatem $[F, E(\lambda_i)] = 0$ obcięte do $V(\lambda_i)$ oraz do $V(\lambda_i)^\perp$, ostatecznie więc ogólnie $[F, E(\lambda_i)] = 0$.

Niech teraz $E = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots + E(\lambda_r)$. E jest rzutem, zatem $P = id - E$ też jest rzutem. Zarówno E jak i P są przemienne z F. $\operatorname{im} P$ jest więc podprzestrzenią niezmienniczą dla F. Rozważmy $F|_{\operatorname{im}P} = \tilde{F}$, $\tilde{F} \in \operatorname{End}(\operatorname{im} P)$. Co najdziwniejsze $\tilde{F}$ nie ma żadnych wektorów własnych, bo każdy w.wł. $\tilde{F}$ jest w.wł. F i należy do $\operatorname{im} E$. Zatem $\operatorname{im} P = \{0\}$ i $P = 0$. Mamy więc $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r)$ tzn F jest diagonalizowalny. Punkt (2) jest więc teraz oczywisty. ∎

WNIOSEK: $f(F) = \sum_{i=1}^{r} f(\lambda_i)\, E(\lambda_i)$

Jest teraz w miarę oczywiste, że rodzaj operatora normalnego można poznać po spektrum: Jeśli F jest normalny to:

$Sp(F) \subset \mathbb{R} \Rightarrow F^+ = F$

$sp(F) \subset S^1 \Rightarrow F^+ = F^{-1}$

$Sp(F) \subset \{0,1\} \Rightarrow F$ jest rzutem ortogonalnym

$Sp\,F \not\ni \{0\} \Rightarrow F$ odwracalny

$Sp(F) \geq 0 \Rightarrow F$ dodatni.

DO CZEGO SIĘ TA CAŁA ALGEBRA MOŻE PRZYDAĆ...

Klasyczny jednowymiarowy oscylator harmoniczny to punkt materialny o masie m którego położenie oznaczymy x pod działaniem siły o potencjale $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$

Równanie ruchu jest wtedy $m\ddot{x}=-kx$, $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$, $\ddot{x}+\omega^2x=0$ $\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Energia (hamiltonian) $H(x,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ $\quad p=m\dot{x}$

Kwantowy oscylator harmoniczny opisywany jest funkcją $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mającą interpretację amplitudy prawdopodobieństwa (po unormowaniu) tzn $\mathbb{R}\ni x\mapsto|\psi|^2\in\mathbb{R}$ jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym punkcie.

ψ spełnia tzw stacjonarne równanie Schrödingera

$$\underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}\psi=E\psi$$

hamiltonian – operator na przestrzeni funkcji $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ spełniających pewne warunki, w szczególności całkowalne z kwadratem. Iloczyn skalarny na tej przestrzeni to $\langle\psi|\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}}\bar{\psi}\cdot\phi\,dx$

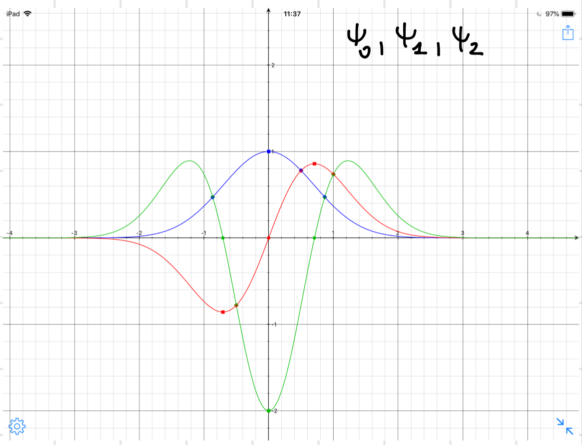
Rozwiązując to równanie stwierdzamy iż energia E może przyjmować tylko niektóre wartości, konkretnie $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ ← wartości własne

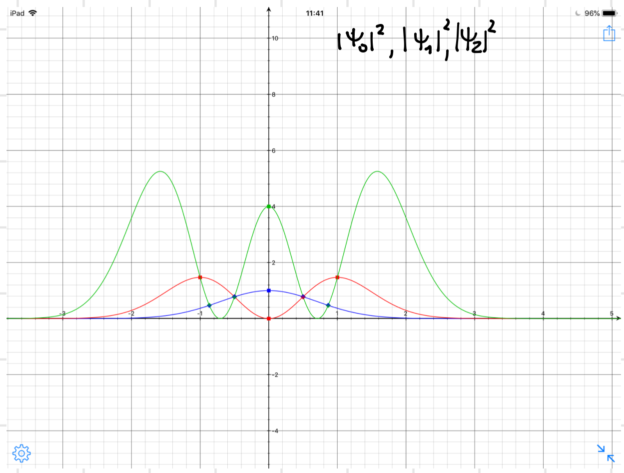
$$\psi_n(x)=N_n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

← wektory własne

wielomiany Hermite'a

$H_0=1$, $H_1=2x$, $H_2=4x^2-2$ ...





Istnieje pewien specyficzny sposób rozwiązywania równania $H\psi = E\psi$ dla oscylatora, który jest bardzo algebraiczny:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}$$

operator $\hat{x}$ - mnożenie przez $\hat{x}$

operator $\hat{p}$ - różniczkowanie

$$\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$[\hat{x},\hat{p}]\psi = -x\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = i\hbar\left(-x\frac{\partial\psi}{\partial x} + x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\right) = i\hbar\psi$$

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $[a,a^+] = \mathbb{1}$, $\{a,a^+\} = \frac{2}{\hbar\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m} + \omega m\hat{x}^2\right)$

tzn $\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\{a,a^+\} = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$

Szukamy wektorów własnych i wartości własnych dla H:

$\hat{H}|\alpha\rangle = E|\alpha\rangle \quad \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)|\alpha\rangle = E|\alpha\rangle$ stany własne dla H są własne też dla a^+a

$\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

Obserwacja: jeśli $|\alpha\rangle$ jest własny dla a^+a to $a|\alpha\rangle$ też:

$$\hat{a}^+\hat{a}\,\underline{\hat{a}|\alpha\rangle} = (\hat{a}\hat{a}^+ - \mathbb{1})\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}(\hat{a}^+a - \mathbb{1})|\alpha\rangle = \hat{a}(\alpha-1)|\alpha\rangle = (\alpha-1)\,\underline{\hat{a}|\alpha\rangle}$$

$\hat{a}|\alpha\rangle$ jest własny dla wartości własnej $(\alpha-1)$ tzn $\hat{a}\alpha \sim |\alpha-1\rangle$

Podobnie $\hat{a}^+\alpha$

$a^+a\,a^+|\alpha\rangle = a^+(aa^+)|\alpha\rangle = a^+(a^+a + \mathbb{1})|\alpha\rangle = (\alpha+1)a^+|\alpha\rangle \qquad a^+|\alpha\rangle \sim |\alpha+1\rangle$

Można wyliczyć stałe normujące:

$\langle\hat{a}^+\alpha|\hat{a}^+\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^+\alpha\rangle = \langle\alpha|(\hat{a}^+a+\mathbb{1})\alpha\rangle = \alpha+1 \qquad \hat{a}^+|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha+1}\,|\alpha+1\rangle$

$\langle\hat{a}\alpha|\hat{a}\alpha\rangle = \langle\alpha|a^+a\,\alpha\rangle = \alpha\langle\alpha\rangle \qquad \hat{a}|\alpha\rangle = \sqrt{\alpha}\,|\alpha-1\rangle$

Operatory $\hat{a}, \hat{a}^+$ odpowiednio obniżają i podwyższają stan własny - to wiemy z samej algebry! Jeśli dołożymy dodatkowe założenie że istnieje stan podstawowy, to dowiemy się, że $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n\rangle \qquad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$