ALGEBRA R 28

Geometria przestrzeni
Euklidesowej.

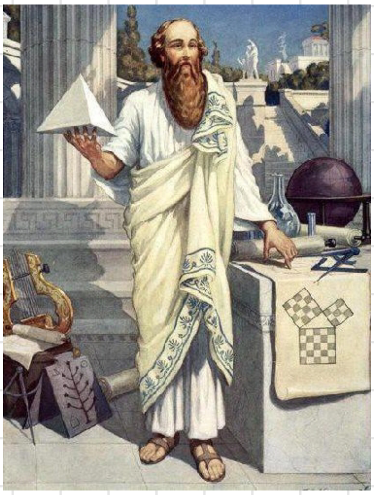
W trakcie tego wykładu pracować będziemy w rzeczywistej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym, tzn w PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ wymiaru skończonego

Na początek twierdzenie znane wszystkim od podstawówki:

TWIERDZENIE (Pitagoras) Jeśli $v,w\in V$, $v\perp w$ to $\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$

DOWÓD:

$$\|v+w\|^2=\langle v+w|v+w\rangle=\langle v|v\rangle+\underbrace{\langle v|w\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle w|v\rangle}_{=0}+\langle w|w\rangle=\|v\|^2+\|w\|^2 \ \blacksquare$$



DEFINICJA: Odległością wektora $v\in V$ od podprzestrzeni $W\subset V$ nazywamy liczbę

$$d(v,W)=\inf_{w\in W}\|v-w\|$$

Wydawało by się, że wyznaczanie tej odległości to zadanie bardziej na analizę (ekstremum związane) tym niemniej można to zrobić także metodami algebraicznymi

STWIERDZENIE Odległość wektora $v\in V$ od podprzestrzeni $W\subset V$ dana jest wzorem $d(v,W)=\|v-Pv\|$ gdzie P jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń W

DOWÓD: Niech w będzie dowolnym elementem W. Wtedy $v-Pv\perp w-Pv$ bo $v-Pv\in W^\perp$ a $w-Pv\in W$

$$\|v-w\|^2=\|v-Pv+Pv-w\|^2=\|v-Pv\|^2+\|w-Pv\|^2\geq\|v-Pv\|^2$$

Dla dowolnego w mamy więc

$$\|v-w\|^2\geq\|v-Pv\|^2 \quad \text{zatem} \quad d(v,W)\geq\|v-Pv\|$$

i jednocześnie dla $w=Pv$ otrzymujemy równość, zatem bez wątpienia $\|v-Pv\|$ jest infimum wartości funkcji $w\mapsto\|v-w\|$ na W. $\blacksquare$

DEFINICJA Miarę $\mu_n:\underbrace{V\times\dots\times V}_{n}\longrightarrow\mathbb{R}$ układu n wektorów definiujemy indukcyjnie podając

$$\mu_1(v)=\|v\|,\quad \mu_n(v_1,\dots,v_n)=d(v_n,\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle)\,\mu_{n-1}(v_1,\dots,v_{n-1}).$$

DEFINICJA: Macierz Grama układu wektorów $(v_1,\dots,v_n)$ nazywamy macierz

$$G(v_1,\dots,v_n)=\begin{bmatrix}\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_n\rangle\\ \langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_n\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_n|v_1\rangle & \langle v_n|v_2\rangle & \cdots & \langle v_n|v_n\rangle\end{bmatrix}$$

Jeśli $(v_1\dots v_n)$ jest bazą w V to macierz Grama jest tożsama z macierzą iloczynu skalarnego w bazie. Macierz Grama można napisać dla dowolnego n niezależnie od wymiaru V i liniowej niezależności/zależności układu wektorów.

Pojęcie miary układu wektorów pojawiają się przy całkowaniu oraz w geometrii różniczkowej przy definicji formy objętości oraz całkowaniu form różniczkowych.

STWIERDZENIE

$$\mu_n(v_1,\dots,v_n)=\sqrt{\det G(v_1,\dots,v_n)}$$

DOWÓD: $\mu_1(v_1)=\|v_1\|$ $\quad \det G(v_1,\dots,v_1)=\det\left[\langle v_1|v_1\rangle\right]=\|v_1\|^2$ zatem dla $n=1$ twierdzenie jest prawdziwe. Zakładamy prawdziwość tw. dla $n=k$ i dowodzimy dla $n=k+1$

$$\det G(v_1,\dots,v_{k+1})=\det\left[\begin{array}{cccc|c}
\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_k\rangle & \langle v_1|v_{k+1}\rangle\\
\langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_k\rangle & \langle v_2|v_{k+1}\rangle\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\langle v_k|v_1\rangle & \langle v_k|v_2\rangle & \cdots & \langle v_k|v_k\rangle & \langle v_k|v_{k+1}\rangle\\
\hline
\langle v_{k+1}|v_1\rangle & \langle v_{k+1}|v_2\rangle & \cdots & \langle v_{k+1}|v_k\rangle & \langle v_{k+1}|v_{k+1}\rangle
\end{array}\right]= *$$

Rozważmy teraz $W=\langle v_1,\dots,v_k\rangle$ i oznaczmy przez P rzut ortogonalny na W. Wektor Pv_{k+1} należy do W zatem można go zapisać jako kombinację liniową wektorów $(v_1,\dots,v_k)$, być może na wiele sposobów jeśli układ $(v_1,\dots,v_k)$ nie jest liniowo niezależny. Wybierzmy którykolwiek z tych sposobów:

$$Pv_{k+1}=\alpha^1v_1+\dots+\alpha^kv_k \qquad v_{k+1}=\underbrace{(v_{k+1}-Pv_{k+1})}_{\text{oznaczymy } v_{k+1}^{\perp}}+\alpha^1v_1+\dots+\alpha^kv_k$$

dla $i\in\{1,\dots,k\}$ mamy $\quad \langle v_i|v_{k+1}\rangle=\underbrace{\langle v_i|v_{k+1}^{\perp}\rangle}_{=0}+\sum_j\alpha^j\langle v_i|v_j\rangle$

$\langle v_{k+1}|v_{k+1}\rangle=\langle v_{k+1}^{\perp}|v_{k+1}\rangle+\sum_j\alpha^j\langle v_{k+1}|v_j\rangle$ Ostatnią kolumnę macierzy Grama można więc zapisać jako:

$$\left[\begin{array}{c}\langle v_1|v_{k+1}\rangle\\ \langle v_2|v_{k+1}\rangle\\ \vdots\\ \langle v_k|v_{k+1}\rangle\\ \hline \langle v_{k+1}|v_{k+1}\rangle\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \hline \langle v_{k+1}|v_{k+1}^{\perp}\rangle\end{array}\right]+\sum_{j=1}^{k}\left[\begin{array}{c}\langle v_1|v_j\rangle\\ \langle v_2|v_j\rangle\\ \vdots\\ \langle v_k|v_j\rangle\\ \langle v_{k+1}|v_j\rangle\end{array}\right]$$

to są kolumny macierzy $G(v_1,\dots,v_{k+1})$ od pierwszej do k-tej. Z definicji wyznacznika wynika, że można je pominąć.

$$*=\det\left[\begin{array}{cccc|c}
\langle v_1|v_1\rangle & \langle v_1|v_2\rangle & \cdots & \langle v_1|v_k\rangle & 0\\
\langle v_2|v_1\rangle & \langle v_2|v_2\rangle & \cdots & \langle v_2|v_k\rangle & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\langle v_k|v_1\rangle & \langle v_k|v_2\rangle & \cdots & \langle v_k|v_k\rangle & 0\\
\hline
\langle v_{k+1}|v_1\rangle & \langle v_{k+1}|v_2\rangle & \cdots & \langle v_{k+1}|v_k\rangle & \langle v_{k+1}|v_{k+1}^{\perp}\rangle
\end{array}\right]= (**)$$

Podobną operację przeprowadzamy na ostatnim wierszu:

$$\langle v_{k+1} | v_i \rangle = \underbrace{\langle v_{k+1}^{\perp} | v_i \rangle}_{=0} + \sum_j \alpha^j \langle v_j | v_i \rangle \quad \text{dla } i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\langle v_{k+1} | v_{k+1}^{\perp} \rangle = \langle v_{k+1}^{\perp} | v_{k+1}^{\perp} \rangle$$

kombinacja liniowa wiersz od 1 do k — pod wyznacznikiem pomijamy

$$\left[\langle v_{k+1} | v_1 \rangle \quad \langle v_{k+1} | v_2 \rangle \quad \dots \quad \langle v_{k+1} | v_k \rangle \quad \langle v_{k+1} | v_{k+1}^{\perp} \rangle \right] = \sum_j \alpha^j \left[\langle v_j | v_1 \rangle \quad \langle v_j | v_2 \rangle \cdots \langle v_j | v_k \rangle \quad 0 \right]$$

$$+ \left[0 \quad 0 \cdots 0 \quad \langle v_{k+1}^{\perp} | v_{k+1} \rangle \right]$$

$$(**) = \det \begin{bmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1 | v_k \rangle & 0 \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2 | v_k \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_k | v_1 \rangle & \langle v_k | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_k | v_k \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle v_{k+1}^{\perp} | v_{k+1}^{\perp} \rangle \end{bmatrix} = \det G(v_1, \dots, v_k) \| v_{k+1}^{\perp} \| =$$

$$= \mu_k^2(v_1, \dots, v_k)\, d^2(v_{k+1}, \langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle) = \mu_{k+1}^2(v_1, \dots, v_{k+1}) \quad \blacksquare$$

Z powyższego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

(1) Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_n$ $\mu_n(v_1, \dots, v_n) = \mu_n(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)})$

Istotnie: macierz $G(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)})$ otrzymujemy z $G(v_1, \dots, v_n)$ stosując permutację σ najpierw do wiersz a potem do kolumn (lub odwrotnie) zatem wyznacznik nie ulega zmianie — poprawia się o $(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} = 1$.

(2) Jeśli $(v_1, \dots, v_n)$ są liniowo zależne to $\mu_n(v_1, \dots, v_n) = 0$. Istotnie: jeśli v_k jest kombinacją liniową $(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n)$ to przestawiamy go na koniec — miara się nie zmienia na mocy poprzedniego wniosku i piszemy

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = \mu_n(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n, v_k) = \mu_{n-1}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots v_n)\, \underbrace{d(v_k, \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots v_n \rangle)}_{0}$$

$= 0$.

(3) Jeśli $F \in \operatorname{End}(V)$ to $\mu_n(Fv_1, \dots, Fv_n) = |\det F|\, \mu_n(v_1, \dots, v_n)$ dla $n = \dim V$. Istotnie: jeśli $(v_1, \dots, v_n)$ jest liniowo zależny to obie strony są 0. Jeśli jest liniowo niezależny to można go użyć jako bazę. Wtedy

$$G(Fv_1, \dots, Fv_n) = \left([F]_v^v \right)^T G(v_1, \dots, v_n)\, [F]_v^v \quad \text{zatem } \det G(Fv_1, \dots, Fv_n) =$$

$$\det G(v_1, \dots, v_n) (\det F)^2.$$