

ALGEBRA 2 3



Obserwacja: Pierwiastki 3-go stopnia z 1 leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Nie jest to przypadek:

$$e^{i\pi/6 + \frac{2\pi}{3}ki} = e^{i\pi/6} \underbrace{e^{\frac{2\pi}{3}ki}}_{\text{Dla } k=0,1,2 \text{ są to pierwiastki trzeciego stopnia z 1.}}$$

$\varepsilon_0 = 1$ $\varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ $\varepsilon_2 = e^{\frac{2\pi}{3} \cdot 2i}$. Pierwiastki z_1 i z_2 powstają z z_1 poprzez pomnożenie przez ε_1 i ε_2 .

STwierdzenie: Dla $z \neq 0$ istnieje n różnych pierwiastków stopnia n z z . Jeśli $z = re^{i\varphi}$ to pierwiastki z z są postaci

$$z_k = z_0 \varepsilon_k \text{ gdzie } z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \text{ a } \varepsilon_k \text{ są pierwiastkami stopnia } n \text{ z } 1, \text{ tzn}$$
$$\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi}{n}ki} \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Dowód: Liczba $z_k = z_0 \varepsilon_k$ jest pierwiastkiem z z , istotnie

$$z_k^n = (\sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} e^{\frac{2\pi}{n}ki})^n = r e^{i\varphi} \underbrace{e^{2\pi ki}}_1 = r e^{i\varphi} = z$$

Dla $k \neq l$ $k, l \in \{0, \dots, n-1\}$ $z_k \neq z_l$, istotnie

$$z_k = z_l \Rightarrow \sqrt[n]{r} z_0 \varepsilon_k = \sqrt[n]{r} z_0 \varepsilon_l \Rightarrow \varepsilon_k = \varepsilon_l \Rightarrow e^{\frac{2\pi}{n}ki} = e^{\frac{2\pi}{n}li} \Rightarrow \frac{2\pi}{n}k = \frac{2\pi}{n}l + 2\pi p$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{n}(k-l) = 2\pi p \Rightarrow \frac{k-l}{n} = p \Rightarrow k-l = pn \text{ ale największe różnice między } k, l \text{ dla } k, l \in \{0, \dots, n-1\} \text{ jest } n-1 \text{ co do wartości bezwzględnej zatem nie może być wielokrotnością } n. \blacksquare$$

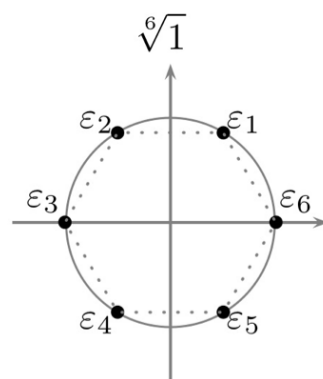
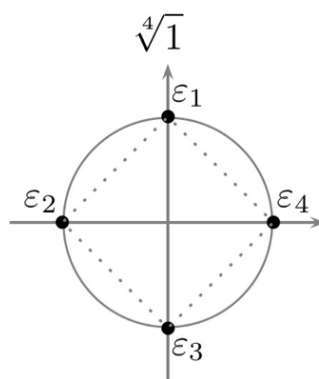
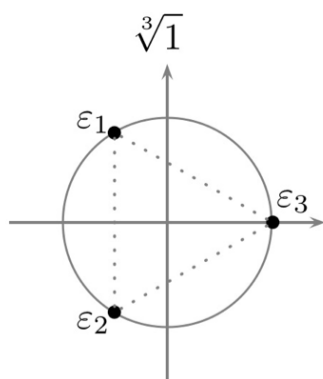
SZCZEGÓLNE WŁASNOŚCI PIERWIASTKÓW Z 1

Ustalmy n i rozważmy $\{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi}{n}i}, \dots, \varepsilon_k = e^{\frac{2\pi}{n}ki}, \dots, \varepsilon_{n-1} = e^{\frac{2\pi(n-1)}{n}i}\}$. Zauważmy, że iloczyn dwóch pierwiastków z jedynki też jest pierwiastkiem z jedynki. Podobnie odwrotność. ε_0 jest elementem neutralnym ze względu na mnożenie. Mnożenie jest łączne (jak w całym $\mathbb{C}$)

STwierdzenie Zbiór pierwiastków n -tego stopnia z 1 wraz z mnożeniem jest grupą.

Zbiór $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ jest generowany przez ε_1 w tym sensie, że $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ dla $k=1, \dots, n-1$. $\varepsilon_1^n = 1$ każdy element zbioru jest więc potęgą ε_1 . **Ćwiczenie:** Wykazać, że zbiór pierwiastków n -tego stopnia z 1 jest generowany przez ε_k w podobnym sensie wtedy i tylko wtedy gdy k i n są względnie pierwsze.

Geometrycznie rzecz biorąc pierwiastki n -tego stopnia z 1 leżą w wierzchołkach n -kąta foremnego, którego jednym z wierzchołków jest 1.



Pokazaliśmy, że wielomiany postaci $\omega_n(z) = z^n - a$ mają n różnych pierwiastków. W szczególności

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \dots (z - \varepsilon_{n-1})$$

Teraz pora zająć się innymi wielomianami.

WIELOMIANY O WSPÓŁCZYNNIKACH Z CIAŁA

Niech K będzie ciałem. Wielomianem stopnia n o współczynnikach z ciała K nazywamy napis

$$\omega: a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0, \quad a_i \in K, \quad a_n \neq 0$$

Formalnie można by powiedzieć, że wielomian jest ciągiem

$(a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ którego prawie wszystkie wyrazy są równe 0
tzn. wszystkie poza skończoną liczbą

Wygodniej jednak jest pracować na „napisach”, bo wtedy operacje dodawania i mnożenia wielomianów są oczywiste. n nazywamy stopniem wielomianu, piszemy $n = \deg \omega$. Oczywiste są własności

$$\deg(\omega + \sigma) \leq \max\{\deg \omega, \deg \sigma\} \quad \deg(\omega \cdot \sigma) = \deg \omega + \deg \sigma$$

W zbiorze wielomianów istnieje operacja bardzo podobna do znanego z liczb całkowitych dzielenie z resztą.

TWIERDZENIE O DZIELENIU Z RESZTĄ, Niech f, g będą wielomianami o współczynnikach z K , założmy ponadto, że $g \neq 0$. Wówczas istnieje wielomiany q i r takie, że

$$f = q \cdot g + r, \quad \deg r < \deg g$$

Wielomiany q, r są wyznaczone jednoznacznie.

DOWÓD: Zauważmy że jeśli $\deg g > \deg f$ to można wziąć $q = 0$ i $r = f$.

Dalej założymy $\deg f \geq \deg g$ i będziemy postępować indukcyjnie względem stopnia f . Weźmy więc $m = \deg f$, $\deg g < m$

3

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

Definiujemy $\tilde{f} = f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g$. $\tilde{f}$ powstaje tak aby $\deg \tilde{f} \leq n-1$.
Twierdzenie obowiązuje dla $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} = g \tilde{q} + \tilde{r} \quad f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g = g \tilde{q} + \tilde{r} \quad f = g \underbrace{\left(\tilde{q} + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right)}_q + \tilde{r}$$

$$\deg \tilde{r} = \deg r < \deg g$$

Krok pierwszy dla $n=1$ (g może być stopnia 1 lub 0)

$$f = ax + b \quad g = cx + d \quad f = \frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad}{c} + b$$

$$f = ax + b \quad g = d \quad f = \frac{a}{d}x \cdot g + b$$

↑ iloraz ↖ reszta

Pozostaje jednoznaczność: $f = q_1 g + r = \tilde{q} g + \tilde{r} \quad (q_1 - \tilde{q})g = \tilde{r} - r$

Jeśli $q_1 \neq \tilde{q}$ to $\deg(q_1 - \tilde{q})g \geq \deg g$ natomiast $\deg(\tilde{r} - r) \leq \max\{\deg \tilde{r}, \deg r\}$

mamy więc sprzeczność. Okazuje się więc, że $q_1 = \tilde{q}$, ale wtedy $r = \tilde{r}$. $\leq \deg g$

Mozemy teraz przejść do pierwiastków wielomianów. Dla wygody oznaczmy zbiór pierwiastków wielomianów o współczynnikach z K symbolem $K[x]$ (lub $K[\cdot]$)

DEFINICJA Dla $\xi \in K$ wartość $w \in K[x]$ na ξ nazywamy liczbę $w(\xi) = a_n \xi^n + \dots + a_1 \xi + a_0$. Mówimy, że ξ jest **pierwiastkiem** w jeśli $w(\xi) = 0$.

TWIERDZENIE BÉZOUT ξ jest pierwiastkiem f wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $g \in K[x]$ taki, że $f = (x - \xi)g$

DOWÓD $\Leftarrow$ oczywiste: $f = (x - \xi)g \Rightarrow f(\xi) = (\xi - \xi)g(\xi) = 0$

$\Rightarrow$ używamy dzielenia z resztą: $f = (x - \xi)q + r$. Skoro ξ jest pierwiastkiem to $0 = f(\xi) = (\xi - \xi)q(\xi) + r(\xi) = r(\xi)$

↑ wielomian stopnia mniejszego niż $\deg(x - \xi) = 1$
czyli wielomian stały
zatem $r = 0$

TWIERDZENIE Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków

DOWÓD: o. o. niech $f \in K[x]$ $\deg f = n$ i $\xi_1, \dots, \xi_m$ $m > n$ będą ⁴ ~~pięć~~ pierwiastkami różnymi

$$f = (x - \xi_1) f_1 \quad \deg f_1 = n - 1$$

$$0 = f(\xi_2) = (\xi_2 - \xi_1) f_1(\xi_2) \Rightarrow f_1(\xi_2) = 0 \Rightarrow f_1 = (x - \xi_2) f_2$$

$$f = (x - \xi_1)(x - \xi_2) f_2 \quad \dots \text{ i t.d.}$$

⋮

$$f = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n) f_n \quad \deg f_n = 0, \text{ tzn } f_n \text{ jest stałe i nie ma pierwiastków}$$

spójność!

DEFINICJA Ciało K nazywamy **algebraicznie domkniętym** jeśli każdy wielomian stopnia n o współczynnikach z ciała K ma dokładnie n pierwiastków licząc z krotnościami

TWIERDZENIE (PODSTAWOWE ALGEBRY) Ciało $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte

Twierdzenie to nazywa się Podstawowym Twierdzeniem Algebry, ale jego dowodu nie da się przeprowadzić metodami czysto algebraicznymi. Dowód (jeden z możliwych) poznaję państwo na wykładzie Analiza Zespolona



ÉTIENNE BÉZOUT
1730 - 1783

PRZESTRZENIE WEKTOROWE

5

Zaczynamy teraz temat, który będzie się ciągnął i rozwijał w zasadzie przez cały wykład. Algebrę $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ też). Naukę się tutaj państwo języka, którym posługują się w tym budynku wszyscy od drugiego roku uczysz i nawet się nad tym nie zastanawiają. Jest to tak naturalne jak dla „zwykłych ludzi” mówienie w języku gdańskim.

Przypominamy sobie teraz szkolne wektory (uporządkowana para punktów...) i zapisujemy definicję.

DEFINICJA Przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy zbiór V z wyróżnionym elementem $0 \in V$ i dwiema operacjami

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

spełniającymi warunki

$$(D1) \quad \forall v, u, w \in V \quad (v+u)+w = v+(u+w) \quad \text{łączność}$$

$$(D2) \quad \forall v, w \quad u+v = v+u \quad \text{przemienność}$$

$$(D3) \quad \forall v \quad 0+v = v+0 = v \quad \text{element neutralny}$$

$$(D4) \quad \forall v \quad \exists u : v+u = u+v = 0 \quad \text{element odwrotny}$$

grupa przemienna

$$(S1) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad \alpha(\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$$

$$(S2) \quad \forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$$

zgodność struktury ciała ze strukturą V .

$$(R1) \quad \forall u, v \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(R2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$$

rozdzielność

Z powyższych warunków wynikają różne pozytywne prawdy, np. że $0 \cdot v = \vec{0}$ albo $(-1)v = -v$

zero w V

zero w ciele

$$\alpha v = (\alpha+0)v = \alpha v + 0v \Rightarrow 0 \cdot v = \vec{0}$$

$$\vec{0} = 0v = (1+(-1))v = v+(-1)v \Rightarrow -v = (-1)v \quad (\text{tu zakładamy, że wiemy iż w grupie jest dokładnie jeden element przeciwny})$$

załóżmy, że $v+u=0=v+w$ $/+u$

$$\underbrace{v+u}_{\vec{0}} + u = \underbrace{v+w}_{\vec{0}} + u \Rightarrow u = w$$

PRZYKŁADY

(1) $V = \{\vec{0}\}$ $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ trywialna przestrzeń wektorowa zwana zerową.

(2) Ciało $\mathbb{K}$ z dodawaniem w $\mathbb{K}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ (mnożenie jak w $\mathbb{K}$)

(3) Niech $\mathbb{K}_n[x]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż n z dodawaniem wielomianów jak zwykle i mnożeniem przez liczby jak zwykle

(4) Można też wziąć wszystkie wielomiany $\mathbb{K}[x]$ bez ograniczania stopnia, działania jak zwykle

(5) Przestrzeń $\mathbb{K}^n$ z działaniami

6

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{bmatrix} \text{ jest } \text{ważną} \text{ przestrzenią wektorową.}$$

(6) Przestrzeń skończonych ciągów liczbowych, ten ciągów takich, które od pewnego miejsca są zero z dodawaniem $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ i mnożeniem $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$

(7) Przestrzeń wszystkich ciągów liczbowych z działaniami jak w (6)

(8) Przestrzeń $\mathcal{C}([0,1])$ funkcji ciągłych o wartościami w $\mathbb{R}$ na odcinku $[0,1]$ jest p.w. nad $\mathbb{R}$ z działaniami

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

(9) $\mathbb{R}$ jest p.w. nad $\mathbb{Q}$ ze zwykłymi działaniami. Ogólnie, $\mathbb{K}$ jest p.w. nad podciałem ciała $\mathbb{K}$.

Bardzo wiele pojęć fizycznych reprezentujemy matematycznymi obiektami mającymi charakter wektorowy w tym sensie, że można je dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste lub zespolone: prędkość, pęd, napięcie, pole elektryczne... Podobnie w QM – podstawowym pojęciem jest tzw. przestrzeń Hilberta, która jest p.w. z dodatkową strukturą.