ALGEBRA R 4

PRZESTRZENIE WEKTOROWE

Zaczynamy teraz temat, który będzie się ciągnął i rozwijał w zasadzie przez cały wykład Algebra I R (II R też). Nauczą się tutaj państwo języka, którym posługują się w tym budynku wszyscy od drugiego roku wzwyż i nawet się nad tym nie zastanawiają. Jest to tak naturalne jak dla „zwykłych ludzi" mówienie w języku polskim.

Przypominamy sobie teraz szkolne wektory (uporządkowana para punktów...) i zapisujemy definicję.

DEFINICJA Przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy zbiór V z wyróżnionym elementem $0 \in V$ i dwiema operacjami

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

spełniającymi warunki

(D1) $\forall v,u,w \in V \quad (v+u)+w = v+(u+w)$ łączność

(D2) $\forall v,w \quad u+v = v+u$ przemienność

(D3) $\forall v \quad 0+v = v+0 = v$ element neutralny

(D4) $\forall v \ \exists u : \ v+u = u+v = 0$ element odwrotny

grupa przemienna

(S1) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V \quad \alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\beta)\cdot v$

(S2) $\forall v \in V \quad 1\cdot v = v$

zgodność struktury ciała ze strukturą V.

(R1) $\forall u,v \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

(R2) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} \ \forall v \in V \quad (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

rozdzielność

Z powyższych warunków wynikają różne pożyteczne prawdy, np. że $\underset{\text{zero w ciele}}{0} \cdot v = \underset{\text{zero w } V}{\vec{0}}$ albo $(-1)v = -v$

$$\alpha v = (\alpha+0)v = \alpha v + 0v \implies 0 \cdot v = \vec{0}$$
$$\vec{0} = 0v = (1+(-1))v = v+(-1)v \implies -v = (-1)v$$ (tu zakładamy, że wiemy iż w grupie jest dokładnie jeden element przeciwny)

załóżmy, że $v+u = 0 = v+w \quad /+u$

$$\underbrace{v+u}_{\vec{0}}+u = \underbrace{v+w}_{\vec{0}}+u \implies u = w \ \blacksquare$$

PRZYKŁADY

(1) $V = \{\vec{0}\}$ $\quad \vec{0}+\vec{0} = \vec{0} \quad \alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$ trywialna przestrzeń wektorowa zwana zerową.

(2) Ciało $\mathbb{K}$ z dodawaniem w $\mathbb{K}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ (mnożenie jak w $\mathbb{K}$)

(3) Niech $\mathbb{K}_n[\,]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż n z dodawaniem wielomianów jak zwykle i mnożeniem przez liczby jak zwykle

(4) Można też wziąć wszystkie wielomiany $\mathbb{K}[\,]$ bez ograniczania stopnia, działania jak zwykle

(5) Przestrzeń $\mathbb{K}^n$ z działaniami

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1+y^1 \\ x^2+y^2 \\ \vdots \\ x^n+y^n \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{bmatrix}$$

jest ważną przestrzenią wektorową.

(6) Przestrzeń skończonych ciągów liczbowych, tzn ciągów takich, które od pewnego miejsca są zero z dodawaniem $(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$ i mnożeniem $\lambda(x_n)=(\lambda x_n)$

(7) Przestrzeń wszystkich ciągów liczbowych z działaniami jak w (6)

(8) Przestrzeń $\mathcal{C}([0,1])$ funkcji ciągłych o wartościach w $\mathbb{R}$ na odcinku $[0,1]$ jest p.w. nad $\mathbb{R}$ z działaniami

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

(9) $\mathbb{R}$ jest p.w. nad $\mathbb{Q}$ ze zwykłymi działaniami. Ogólnie, $\mathbb{K}$ jest p.w. nad podciałem ciała $\mathbb{K}$.

Bardzo wiele pojęć fizycznych reprezentujemy matematycznymi obiektami mającymi charakter wektorowy w tym sensie, że można je dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste lub zespolone: prędkości, pędy, siły, pole elektryczne… Podobnie w QM – podstawowym pojęciem jest tzw. przestrzeń Hilberta, która jest p.w. z dodatkową strukturą.

LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ UKŁADU WEKTORÓW, BAZA

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. *Kombinacją liniową* wektorów $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy wektor $\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

gdzie $\alpha_1 \dots \alpha_n$ są elementami z ciała $\mathbb{K}$. Kombinacja liniowa zawsze jest skończona w tym sensie, że używamy skończonej liczby wektorów. Zbiór wektorów $S \subset V$ nazywamy *liniowo niezależnym* jeśli dla dowolnego skończonego podzbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ zachodzi implikacja

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Zbiór wektorów, który nie jest liniowo niezależny nazywamy *liniowo zależnym*.

STWIERDZENIE (*): **Jeśli S jest liniowo zależny, to istnieje $v \in S$, który jest liniową kombinacją wektorów z S**

DOWÓD: Skoro S jest liniowo zależny to znaczy, że istnieje układ n wektorów z S taki że $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ i przynajmniej jeden ze współczynników jest różny od zera. Bez straty ogólności można założyć, że jest to α_1 (w razie czego przenumerowujemy wektory). Piszemy $\quad \alpha_1 x_1 = -(\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) x_n$$

Wektor x_1 jest kombinacją liniową wektorów $x_2 \dots x_n$.

Prawdziwe jest też odwrotne **STWIERDZENIE** Jeśli w zbiorze S wektor v jest liniową kombinacją wektorów $x_1 \dots x_n$, $x_i \in S$ to S jest liniowo zależny. **18**

DOWÓD: Jeśli $v = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ to $v - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n = 0$ i współczynnik przy v jest różny od 0, czyli S jest liniowo zależny.

Zauważmy, że prawdziwe są następujące obserwacje:

→ Jeśli S jest liniowo niezależny, to każdy podzbiór S jest liniowo niezależny.

→ Jeśli $\tilde{S} \subset S$ i $\tilde{S}$ jest liniowo zależny to S też jest liniowo zależny.

→ Jeśli S jest liniowo zależny to zawiera skończony liniowo zależny podzbiór. (wynika to z dowodu stwierdzenia (*))

Niech S będzie podzbiorem V. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów z S nazywamy powłoką liniową S lub przestrzenią rozpiętą przez S. Oznaczamy ten zbiór span S, jeśli S jest skończony $S = \{x_1 \dots, x_n\}$ to piszemy też $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Ta druga nazwa jest uzasadniona tym, że span S jest przestrzenią wektorową z działaniami dodawania wektorów i mnożenia przez liczbę odziedziczonych z V. To prowadzi nas do naturalnego pojęcia podprzestrzeni wektorowej: W jest podprzestrzenią wektorową w V jeśli $W \subset V$ i W jest zamknięte ze względu na dodawanie i mnożenie przez liczby. Zauważmy, że każda podprzestrzeń wektorowa musi zawierać wektor zerowy.

PRZYKŁADY PODPRZESTRZENI

(1) $V = \mathbb{K}[\,]$ $\quad W = \{ w \in \mathbb{K}[\,] : w(1) = 0 \}$

(2) $V = C([0,1])$ $\quad W = \{ f \in V : f(0) = f(1) \}$

(3) $V = \mathbb{C}^2$ $\quad W = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} : z_1 + z_2 = 0 \right\}$

(4) $V = \mathbb{K}[\,]$, $W = \mathbb{K}_n[\,]$

BAZA

Zauważmy, że niektóre z przestrzeni wektorowych podanych w przykładach na początku wykładu mają interesującą własność: są powłokami liniowymi pewnego zbioru liniowo niezależnych wektorów. Na przykład:

$$\mathbb{K}^n = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \qquad e_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

$$W \subset \mathbb{C}^2 \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} : z_1 + z_2 = 0 \right\} \qquad W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{K}[\,] = \text{span}\{w_0, w_1, \dots, w_k, \dots\} \qquad w_k(x) = x^k$$

$$W \subset \mathbb{K}[\,] \quad W = \{ w \in \mathbb{K}[\,] : w(1) = 0 \} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots\} \qquad v_i(x) = (x-1)^i$$

i.t.d. Czy każda przestrzeń wektorowa ma tę własność? Tzn czy każda jest rozpięta przez pewien układ liniowo niezależnych wektorów? Okazuje się, że tak, ale powód nie jest filozoficznie i dowodowo taki prosty. Zanim sformułujemy twierdzenie wprowadźmy nazwę:

Bazą przestrzeni wektorowej V nazywamy liniowo niezależny układ wektorów rozpinających całą przestrzeń. Jeśli $V=\{0\}$ to bazę definiujemy oddzielnie jako zbiór składający się jedynie z wektora zerowego.

TWIERDZENIE Każda przestrzeń wektorowa ma bazę.

Twierdzenia tego nie dowodzimy. Dowód wymaga zastosowania Lematu Kuratowskiego-Zorna. Lemat ten jest równoważny pewnikowi wyboru. To sprowadza nas w bezpośrednie pobliże podstaw matematyki, czego raczej będziemy unikać.

STWIERDZENIE: (1) Baza jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V (tzn jeżeli B jest bazą to $B\cup\{x\}$ dla dowolnego x jest liniowo zależny)
(2) każdy element $0\neq v\in V$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową elementów bazy (o niezerowych współczynnikach)

DOWÓD:
(1) Weźmy dowolny $x\in V$. Skoro $V=\operatorname{span}B$ to istnieje $n\in\mathbb{N}$ i $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ i $x_1,\dots,x_n\in B$ takie, że $\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=x$. Wtedy

$\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n-x=0$ i jest to kombinacja liniowa elementów z $B\cup\{x\}$ równa zero z przynajmniej jednym niezerowym współczynnikiem, $B\cup\{x\}$ jest więc liniowo zależny.

(2) Załóżmy, że $v=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=\beta_1y_1+\dots+\beta_my_m$ i $x_i,y_j\in B$. Wtedy

$$0=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n-\beta_1y_1-\dots-\beta_my_m=^*$$

Weźmy teraz $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, $Y=\{y_1,\dots,y_n\}$, $Z=X\cup Y=\underbrace{[X\cap Y]}_{Z_1}\cup\underbrace{[X\setminus(X\cap Y)]}_{Z_2}\cup\underbrace{[Y\setminus(X\cap Y)]}_{Z_3}$

$$*=\sum_{u\in A\cup B}\lambda_u\cdot u$$

$u\in Z_1 \Rightarrow u=x_i=y_j \quad \lambda_u=\alpha_i-\beta_j$

$u\in Z_2 \Rightarrow u=x_i \quad \lambda_u=\alpha_i$

$u\in Z_3 \Rightarrow u=y_j \quad \lambda_u=-\beta_j$

B jest bazą więc $\lambda_u=0$. Wynika z tego, że współczynniki α_i i β_j przy wektorach z Z_2 i Z_3 są równe zero a współczynniki przy α_i i β_j przy wektorach z Z_1 są odpowiednio sobie równe. Ostatecznie więc obie sumy α_ix_i β_jy_j zawierają te same istotne (niezerowe) składniki. ■

Nasz wykład poświęcony będzie w szczególności przestrzeniom, które mają skończoną bazę. Taką przestrzeń nazywać będziemy **skończenie wymiarową**. Przestrzeń zerowa też należy do tej klasy.

TWIERDZENIE W skończenie wymiarowej przestrzeni wszystkie bazy mają tyle samo elementów.

20

DOWÓD Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru. Z definicji oznacza to że ma bazę mającą skończoną liczbę elementów. Oznaczmy tę bazę $B=\{x_1, x_2, \dots x_n\}$. Pokażemy najpierw, że dowolny liniowo niezależny układ n wektorów $\{y_1, \dots, y_n\}$ też jest bazą.

Zapiszmy $y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ da się, bo B jest bazą. Ponadto nie wszystkie α_i są zero, bo $y_1 \neq 0$ jako element liniowo niezależnego układu. Załóżmy, że $\alpha_1 \neq 0$ (jeśli nie, przenumerowujemy B)

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n \quad / : \alpha_1 \qquad \frac{y_1}{\alpha_1} = x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Układ $\{y_1, x_2, x_3 \dots x_n\}$ rozpina tę samą przestrzeń co $\{x_1, \dots, x_n\}$ czyli całe V, istotnie:

$$v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} y_1 + \left(\lambda_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 + \dots + \left(\lambda_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) x_n$$

Krok indukcyjny: Załóżmy, że $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ dla pewnego $m < n$. Wtedy

$$y_{m+1} = a_1 y_1 + \dots + a_m y_m + b_{m+1} x_{m+1} + \dots + b_n x_n$$

nie wszystkie te współczynniki są zero bo jeśli tak, to $(y_1, \dots, y_m, y_{m+1})$ byłby liniowo zależny

Załóżmy że $b_{m+1} \neq 0$

$$x_{m+1} = \frac{1}{b_{m+1}} y_{m+1} - \frac{a_1}{b_{m+1}} y_1 - \dots - \frac{a_m}{b_{m+1}} y_m - \frac{b_{m+2}}{b_{m+1}} x_{m+1} + \dots + \frac{b_n}{b_{m+1}} x_n$$

czyli $\operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Krok indukcyjny skończony. Mamy więc że $\{y_1 \dots y_n\}$ jest bazą.

Załóżmy teraz, że $\{x_1 \dots x_n\}$ jest bazą oraz $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest bazą. Jeśli $m > n$ to $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo niezależny a więc na mocy powyższego jest bazą. Wtedy y_{n+1} zapisuje się jako kombinacja liniowa $\{y_1, \dots, y_n\}$ więc $\{y_1, \dots, y_m\}$ jest liniowo zależny $\lightning$. Załóżmy więc, że $m < n$, no ale wtedy $\{x_1, \dots, x_m\}$ jest bazą i $\{x_1 \dots x_n\}$ musi być liniowo zależny $\lightning$. Jedyna możliwość to $m = n$. ■

Powyższe twierdzenie daje możliwość zdefiniowania wymiaru przestrzeni wektorowej: Jeśli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa to wymiarem V nazywamy liczbę elementów bazy V. Wymiar oznaczamy $\dim V$. Jeśli V nie jest skończenie wymiarowa to piszemy $\dim V = \infty$. Zauważmy, że wśród przestrzeni wymiaru nieskończonego są bardzo różne przestrzenie: np $\mathbb{K}[\,]$ ma bazę przeliczalną, a $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nie. Podobnie przestrzeń ciągów liczbowych nie ma bazy przeliczalnej.

Weźmy teraz V: $\dim V = n$. Zachodzi następujące **STWIERDZENIE** Każdy układ m wektorów dla $m > n$ jest liniowo zależny.

DOWÓD Gdyby $\{y_1, \dots, y_m\}$ był liniowo niezależny to także $\{y_1, \dots, y_n\}$ byłby niezależny. Jednak wtedy $\{y_1 \dots, y_n\}$ byłby bazą i y_{n+1} można by wyrazić jako kombinację liniową $y_1 \dots y_n$, co stoi w sprzeczności z liniową niezależnością $y_1 \dots y_m$. ∎

Oczywiście każdy nieskończony układ wektorów w przestrzeni skończonego wymiaru też jest liniowo zależny.

W przestrzeni wymiaru skończonego łatwo można udowodnić ogólnie prawdziwe **TWIERDZENIE** **Każdy układ $\{x_1, \dots, x_m\}$ $m < \dim V$ wektorów liniowo niezależnych można uzupełnić do bazy.**

DOWÓD Podobny jak poprzednio. Weźmy $\{x_1, \dots, x_m\}$ i jakąś bazę B. Usuńmy z B wektory $\{x_1, \dots, x_m\}$ jeśli tam są i pozostałe elementy ponumerujmy $\{y_1, \dots, y_k\} = B \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. Rozważmy $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k\}$. Wiadomo, że układ ten rozpina V bo zawiera B. Oznacza to, że albo $\{x_1 \dots y_k\}$ jest liniowo niezależny i wtedy jest szukaną bazą (musi być $\{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k\} = B$) lub jest liniowo zależny. Jeśli jest zależny to istnieją współczynniki

$\alpha_1 \dots \alpha_m, \beta_1 \dots \beta_k$ nie wszystkie równe zero i takie, że

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k = 0$$

któryś z tych musi być różny od zera, bo jak nie, to $\{x_1 \dots x_m\}$ liniowo zależny. Załóżmy, że to β_k.

$$y_k = -\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} x_1 + \dots + \frac{\alpha_m}{\beta_1} x_m + \frac{\beta_1}{\beta_k} y_1 + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} y_{k-1}\right)$$

zatem $\{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_{k-1}\}$ rozpina V. Układ ten może być liniowo niezależny – wtedy jest szukaną bazą, albo zależny, wtedy powtarzamy procedurę i usuwamy kolejny z „igreków". Procedura ta zakończy się najpóźniej na usunięciu y_1, bo założyliśmy $m < \dim V$, więc przynajmniej jeden wektor trzeba dodać. ∎

WSPÓŁRZĘDNE

Mając bazę B przestrzeni V możemy jak wiadomo zapisać każdy wektor jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów bazy z niezerowymi współczynnikami. Jeśli $\dim V < \infty$ nie upieramy się przy tych niezerowych i zapisujemy w bazie $E = (e_1, \dots, e_n)$ wektor

$$v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$$

współrzędne V w bazie E