15 MARCA

ZADANIE 8

$P_1, P_2 \in End(V)$ SĄ RZUTAMI. UDOWODNIĆ ŻE

$$P_1+P_2 \text{ JEST RZUTEM} \iff P_1P_2=0 \text{ i } P_2P_1=0$$

$\Leftarrow \ (P_1+P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1+P_2+0+0 = P_1+P_2$

$\Rightarrow \ (P_1+P_2)^2 = P_1+P_2 \Rightarrow P_1P_2+P_2P_1=0$

$$P_1P_2+P_2P_1=0 \quad /P_1$$

$$P_1 / \quad P_1P_2P_1 + P_2P_1 = 0$$

$$P_1P_2P_1 + P_1P_2P_1 = 0$$

$$\underbrace{P_1P_2}_{-P_1P_2}P_1 = 0$$

$$-P_1P_1P_2 = 0$$

$$P_1P_2 = 0$$

ZADANIE 9

$V = \mathbb{R}_n[\cdot]$, $n \geq 3$ SPRAWDZIĆ, ŻE $P \in End(V)$

$$(Pv)(t) = v(5) + (t-5)v'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2 v''(5)$$

JEST RZUTEM. ZNALEŹĆ V_0 i V_1 TAKIE, ŻE

P JEST RZUTEM NA V_1 WZDŁUŻ V_0

$(PPv)(t) = (Pv)(5) + (t-5)(Pv)'(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2(Pv)''(5) =$

$(Pv)(5) = v(5) \quad (Pv)'(5) = v'(5) \quad (Pv)''(5) = v''(5)$

$V_1 = \mathbb{R}_2[\cdot]$

$V_0 = \ker P = \{v : v(5)=0, \ v'(5)=0, \ v''(5)=0\} = \{v(t) = (t-5)^3 w(t)\}$

ZADANIE 10

NAPISAĆ MACIERZ Q W BAZIE STANDARDOWEJ $\mathbb{R}^3$, ZNALEŹĆ SYGNATURĘ I WSPÓŁRZĘDNE DIAGONALIZUJĄCE METODĄ LAGRANGE'A

ZNALEŹĆ BAZĘ DIAGONALIZUJĄCĄ,

(a) $Q(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (2x_3)^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$

(b) $Q(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3$

ZADANIE 11

ZNALEŹĆ SYGNATURĘ FORMY $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(x) = 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

$$Q(x) = (x_1 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2) \qquad \mathbb{R}^n = \overset{=V_1}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle} \oplus \overset{=V_0}{\left\{ x : \sum x_i = 0 \right\}}$$

$Q|_{V_1} \geq 0 \qquad Q|_{V_0} \leq 0$, PONADTO JEŚLI

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right) \text{ to } b(x,y) = 0 \text{ dla } x \in V_1 \text{ i } y \in V_0$$

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\big(\overbrace{x_1 + \dots + x_n}^{n\cdot a} + \overbrace{y_1 + \dots + y_n}^{0} \big)^2 - \big((x_1+y_1)^2 + \dots + (x_n+y_n)^2 \big) - \big(\overbrace{x_1 + \dots + x_n}^{n\cdot a} \big)^2 +$$

$$+ \big(\underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}_{n \cdot a^2} \big) - \big(\overbrace{y_1 + \dots + y_n}^{0} \big)^2 + \big(y_1^2 + \dots + y_n \big)^2 \Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\cancel{n^2 a^2} - \big((a+y_1)^2 + \dots + (a+y_n)^2 \big) - \cancel{n^2 a^2} + na^2 + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\big(\cancel{a^2 n} + 2a\underbrace{(y_1 + \dots + y_n)}_{0} + \cancel{(y_1^2 + \dots + y_n)^2} + \cancel{na^2} + \cancel{(y_1^2 + \dots + y_n^2)} \Big] = 0$$

ZATEM W BAZIE DOSTOSOWANEJ DO ROZKŁADU NA V_1 I V_0 MACIERZ Q MA POSTAĆ

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

SYGNATURA $(1, n-1)$

ZADANIE 12

$Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ $P(x) = x_1x_2 - (x_3)^2$ ZBADAĆ CZY ISTNIEJE, A JEŚLI TAK TO ZNALEŹĆ OPERATOR $F \in End(\mathbb{R}^3)$ TAKI ŻE $P(x) = Q(F(x))$

ZADANIE 13

W ZALEŻNOŚCI OD PARAMETRÓW a_1, a_2, a_3 ZNALEŹĆ SYGNATURĘ FORMY KWADRATOWEJ $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{K}$ $Q(x) = x^T A x$

DLA
$$A = \begin{bmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & a_2+a_3 \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & a_2+a_3 \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & a_3+a_3 \end{bmatrix}$$

ZNALEŹĆ $\ker b = \{x : b(x, \cdot) = 0\}$ JEŚLI b JEST SYMETRYCZNA, FORMA, DWULINIOWA, STOWARZYSZONA Z Q.