

22 MARCA

ZADANIE 11

ZNALEŹĆ SYGNATURĘ FORMY $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

$$Q(x) = (x_1 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad \mathbb{R}^n = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=V_1} \oplus \underbrace{\{x : \sum x_i = 0\}}_{=V_0}$$

$Q|_{V_1} \geq 0$ $Q|_{V_0} \leq 0$, PONADTO JEŚLI

$b(x, y) = \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ to $b(x, y) = 0$ dla $x \in V_1$ i $y \in V_0$

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \frac{1}{2} \left[(x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n)^2 - ((x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2) - (x_1^2 + \dots + x_n^2) + \right. \\ &\quad \left. + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[n^2 a^2 - ((a + y_1)^2 + \dots + (a + y_n)^2) - n^2 a^2 + n a^2 + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[- (n a^2 + 2 a (y_1 + \dots + y_n)) + (y_1^2 + \dots + y_n^2) + n a^2 + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \right] = 0 \end{aligned}$$

ZATEM W BAZIE DOSTOSOWANEJ DO ROZKŁADU NA V_1 i V_0 MACIERZ Q MA POSTAĆ

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

SYGNATURA $(1, n-1)$

ZADANIE 12

$Q(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ $P(x) = x_1 x_2 - (x_3)^2$ ZBADAĆ CZY ISTNIEJE,

A JEŚLI TAK TO ZNALEŹĆ OPERATOR $F \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ TAKI

$$\text{ZE } P(x) = Q(F(x))$$

ZADANIE 13

W ZALEŻNOŚCI OD PARAMETRÓW a_1, a_2, a_3 ZNALEŹĆ

SYGNATURĘ FORMY KWADRATOWEJ $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ $Q(x) = x^T A x$

DLA

$$A = \begin{bmatrix} a_1 + a_1 & a_1 + a_2 & a_2 + a_3 \\ a_2 + a_1 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 \\ a_3 + a_1 & a_3 + a_2 & a_3 + a_3 \end{bmatrix}$$

ZNALEŹĆ $\ker b = \{x: b(x, \cdot) = 0\}$ JEŚLI b JEST SYMETRYCZ-
NĄ, FORMĄ, DWULINIOWĄ, STOWARZYSZONĄ Z Q .

ZADANIE 14

FORMA KWADRATOWA NAZYWA SIĘ ROZKŁADALNĄ JEŚLI ISTNIEJĄ

FORMY LINIOWE φ I ψ TAKIE, ŻE $Q = \varphi\psi$, TZN

$Q(v) = \varphi(v)\psi(v)$. DOWIEŚĆ, ŻE JEŚLI $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ TO TO Q JEST
ROZKŁADALNA $\Leftrightarrow \operatorname{rk} Q \leq 2$, ZNALEŹĆ I UDOWODNIĆ
ODPOWIEDNIE KRYTERIUM DLA $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.