

Zadanie 1. Sprawdzić, że operator $F \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ określony jako mnożenie przez macierz F jest normalny; znaleźć ortonormalną bazę wektorów własnych, rzuty ortogonalne na podprzestrzenie własne oraz rozkład spektralny tego operatora.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 6-8i \\ 10 & i \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Znaleźć macierz $[F^\dagger]_e^e$ sprzężenia hermitowskiego operatora F , jeśli e oznacza bazę standardową $1, t, t^2$ przestrzeni $V := \mathbb{R}_2[t]$, przy czym $(Fv)(t) := v(t+1)$ (operator przesunięcia) oraz $(v|w) := \int_{-1}^1 v(t)w(t)dt$.

Zadanie 3. (Podobne, inną metodą) Znaleźć macierz $[F^\dagger]_e^e$ sprzężenia hermitowskiego operatora F , jeśli e oznacza bazę standardową $1, t, t^2$ przestrzeni $V := \mathbb{R}_2[t]$, przy czym $(Fv)(t) := v'(t)$ (operator różniczkowania) oraz $(v|w) := \int_{-1}^1 \overline{v(it)}w(it)dt$.

Zadanie 4. Niech V będzie przestrzenią unitarną oraz $A, B \in \text{End}(V)$. Dowieść, że:

- (a) $\ker(A^\dagger A) = \ker A$, $\text{im}(A^\dagger A) = (\ker A)^\perp = \text{im} A^\dagger$;
- (b) jeśli $AB^\dagger = B^\dagger A = 0$, to $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$ oraz $\text{im}(A+B)$ jest ortogonalną sumą prostą $\text{im} A$ i $\text{im} B$;