

Algebra C

Materiały pomocnicze do uczenia się liczenia funkcji od macierzy

Zadanie: Obliczyć $\sin(\frac{\pi}{2}F)$, gdzie $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie: Powyższe zadanie rozwiążemy dwoma sposobami. W pierwszym z nich korzystamy bezpośrednio z definicji funkcji całkowitej od macierzy i całego arsenału analizy spektralnej. Zachęcam państwa do podjęcia próby zrozumienia tej metody. Będzie to pomocne w dalszym państwa naukowym życiu. Drugi sposób jest nieco mniej pouczający, ale za to wygodny jeśli istotne jest szybkie uzyskanie wyniku. Niezależnie od tego, który ze sposobów wybierzemy, zacząć należy od analizy spektralnej, czyli od znalezienia wartości własnych operatora F . Pierwszy sposób wymaga także znalezienia podprzestrzeni własnych i, ewentualnie, pierwiastkowych.

WARTOŚCI WŁASNE: *Wartością własną* operatora F nazywamy liczbę λ taką, że istnieje niezerowy wektor v spełniający równanie $Fv = \lambda v$. Innymi słowy działanie operatora na wektor v sprowadza się do mnożenia go przez liczbę λ . Taki wektor nazywa się *wektorem własnym* F dla wartości własnej λ . Skoro $Fv = \lambda v$ to $Fv - \lambda v = 0$ i dalej $(F - \lambda I)v = 0$. Oznacza to, że jeśli λ jest wartością własną F , to $F - \lambda I$ ma nietrywialne jądro a tym samym jest nieodwracalny. W tej sytuacji $\det(F - \lambda I) = 0$. Daje to metodę wyznaczania wartości własnych. Wartości własne są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $w_F(\lambda) = \det(F - \lambda I)$.

$$w_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Mamy więc dwie wartości własne $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$. Wartość własna λ_1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu charakterystycznego - mówimy, że ma *krotność* dwa. W tej sytuacji jest możliwe, że operator F jest niediagonalizowalny, jeśli przestrzeń własna dla wartości własnej λ_1 jest wymiaru mniejszego niż 2

PODPRZESTRZENIE WŁASNE: Szukamy podprzestrzeni własnej dla wartości własnej $\lambda_1 = -1$:

$$V(-1) = \ker(F - \lambda_1 I) = \ker(F + I) = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $V(-1)$ to $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ Mamy zatem

$$V(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ponieważ $\dim V(-1) = 1 < 2$ to istotnie operator F jest niediagonalizowalny i potrzebne będzie znalezienie podprzestrzeni pierwiastkowej dla wartości własnej -1 .

Szukamy podprzestrzeni własnej dla wartości własnej $\lambda_2 = 3$:

$$V(3) = \ker(F - \lambda_2 I) = \ker(F - 3I) = \ker \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $V(3)$ to $\begin{cases} -x + z = 0 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$ Mamy zatem

$$V(3) = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 2z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ponieważ F jest niediagonalizowalny, tzn nie istnieje baza wektorów własnych dla F , szukamy podprzestrzeni pierwiastkowej dla wartości własnej λ_1 :

$$W(-1) = \ker(F - \lambda_1 I)^2 = \ker(F + I)^2 = \ker = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \ker = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jest elementem $W(-1)$ to $x + 3y + 9z = 0$ Mamy zatem

$$W(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} -3y - 9z \\ y \\ z \end{bmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Bazę $W(-1)$ wygodnie jest wybrać tak, aby jeden z wektorów należał do $V(-1)$.

WYNIKI ANALIZY SPEKTRALNEJ

$$w_F(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -1, \quad n_1 = 2, \quad V(-1) &= \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \\ \lambda_2 = 3, \quad n_2 = 1, \quad V(3) &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Operator F jest niediagonalizowany. Rozkład $\mathbb{R}^3$ na podprzestrzenie niezmiennicze ma postać

$$\mathbb{R}^3 = W(-1) \oplus V(3),$$

baza zgodna z tym rozkładem to:

$$f = \left(f_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Metoda "naukowa". Szukamy macierzy operatora $\sin(\frac{\pi}{2}F)$, w bazie standardowej e . Jednak najpierw znajdziemy macierz $[\sin(\frac{\pi}{2}F)]_f^e$ co jest stosunkowo łatwe, a następnie dokonamy zamiany bazy. W tym celu będziemy działać operatorem $\sin(\frac{\pi}{2}F)$ na wektory bazy f . Nie będziemy wyniku zapisywać w bazie f , gdyż i tak chodzi nam ostatecznie o macierz w bazie standardowej e . Będziemy zatem musieli dokonać zamiany bazy tylko z jednej strony. Liczymy więc

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}F\right)f_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}F\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} F^{2n+1} f_1}{(2n+1)!} =$$

korzystamy tutaj z faktu, że f_1 jest wektorem własnym, więc działanie operatora F na f_1 polega na mnożeniu f_1 przez λ_1 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+1} (\lambda_1)^{2n+1} f_1}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) f_1 = \sin(\frac{\pi}{2} \lambda_1) f_1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) f_1 = -f_1$$

Podobny rachunek zrobilibyśmy dla f_3 , który też jest wektorem własnym, zatem

$$\sin(\frac{\pi}{2} F) f_3 = \sin(\frac{\pi}{2} \lambda_2) f_3 = \sin(\frac{3\pi}{2}) f_3 = -f_3.$$

Gorzej z wektorem f_2 , który jest wektorem z przestrzeni pierwiastkowej, a więc wiadomo o nim tylko, że $(F - \lambda_1 I)^2 f_2 = (F + I)^2 f_2 = 0$. Wykorzystajmy to:

$$\sin(\frac{\pi}{2} F) = \sin(\frac{\pi}{2} F - \frac{\pi}{2} \lambda_1 I + \frac{\pi}{2} \lambda_1 I) = \sin(\frac{\pi}{2} (F - \lambda_1 I) + \frac{\pi}{2} \lambda_1 I) =$$

Teraz skorzystamy z tego, że $\frac{\pi}{2} \lambda_1 I$ jest przemienny ze wszystkimi operatorami, w szczególności także z $\frac{\pi}{2} (F - \lambda_1 I)$, więc możemy stosować wzór na sinus sumy taki jak dla argumentu rzeczywistego:

$$\begin{aligned} &= \sin(\frac{\pi}{2} (F - \lambda_1 I)) \cos(\frac{\pi}{2} \lambda_1 I) + \cos(\frac{\pi}{2} (F - \lambda_1 I)) \sin(\frac{\pi}{2} \lambda_1 I) = \\ &\quad \sin(\frac{\pi}{2} (F + I)) \cos(-\frac{\pi}{2}) I + \cos(\frac{\pi}{2} (F + I)) \sin(-\pi/2) I = \\ &\quad -\cos(\frac{\pi}{2} (F + I)). \end{aligned}$$

Rozwijając będziemy względem $F + I$:

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{2} F) f_2 &= -\cos(\frac{\pi}{2} (F + I)) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{\pi}{2} (F + I))^{2n}}{(2n)!} \right) f_2 = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n} ((F + I))^{2n} f_2}{(2n)!} = \end{aligned}$$

Wypisujemy kilka pierwszych wyrazów (dla $n=0$, $n=1$ i $n=2$)

$$= -(I f_2 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2 (F + I)^2 f_2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^4 (F + I)^4 f_2}{4!}) + \dots = -f_2,$$

gdyż już drugi wyraz rozwinięcia jest zero.

Podsumowując, mamy

$$\sin(\frac{\pi}{2} F) f_1 = -f_1 \quad \sin(\frac{\pi}{2} F) f_2 = -f_2, \quad \sin(\frac{\pi}{2} F) f_3 = -f_3$$

zatem

$$[\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_f = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Żeby obliczyć $[\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_e$ trzeba dokonać zamiany bazy:

$$[\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_e = [\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_f [\text{id}]^f_e.$$

Macierz $[\text{id}]^f_e$ jest macierzą odwrotną do $[\text{id}]^e_f$, której kolumnami są wektory z bazy f :

$$[\text{id}]^e_f = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoba spostrzegawcza zauważa teraz, że w tym konkretnym przypadku $[\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_f = -[\text{id}]^e_f$ zatem

$$[\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_e = [\sin(\frac{\pi}{2} F)]^e_f [\text{id}]^f_e = -[\text{id}]^e_f [\text{id}]^f_e = -I.$$

Osoba mniej spostrzegawcza liczy macierz odwrotną do $\begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i mnożąc przez nią $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ z prawej strony otrzymuje wynik. Tak czy inaczej okazuje się, że

$$[\sin(\frac{\pi}{2}F)]^e_e = -I.$$

Metoda szybkich rachunków. Mam nadzieję, że idea tej metody została wyłożona na wykładzie. Przypomnę ją tylko pokrótce. Tak jak można dzielić wielomiany przez siebie z resztą podobnie można dzielić funkcje analityczne przez wielomiany. Mając więc np. funkcję $\sin(\frac{\pi}{2}\lambda)$ możemy zapisać:

$$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda) = \varphi(\lambda)w_F(\lambda) + r(\lambda),$$

gdzie φ jest funkcją analityczną, w_F wielomianem charakterystycznym (można tu użyć dowolnego wielomianu zerującego operator) a r jest resztą, czyli wielomianem stopnia mniejszego niż w_F . Ponieważ $w_F(F) = 0$ to $\sin(\frac{\pi}{2}F) = r(F)$. Wielomian r będziemy nazywać *wielomianem interpolacyjnym*. Pozostaje znaleźć jego współczynniki.

$$r(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Równanie:

$$\sin(\frac{\pi}{2}\lambda) = r(\lambda)$$

musi być spełnione dla wartości własnych, zatem

$$\begin{cases} \sin(-\frac{\pi}{2}) = a - b + c \\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = 9a + 3b + c. \end{cases}$$

Brakuje jeszcze jednego równania. Otrzymamy je porównując pochodne dla wartości własnej -1 , która jest wartością podwójną:

$$\frac{\pi}{2} \cos(-\frac{\pi}{2}) = -2a + b.$$

Ostatecznie mamy do rozwiązania:

$$\begin{cases} -1 = a - b + c \\ -1 = 9a + 3b + c \\ 0 = -2a + b, \end{cases} \quad \text{co daje} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1. \end{cases}$$

Wielomian interpolacyjny r okazuje się więc wielomianem stałym $r(\lambda) = -1$ i ostatecznie

$$\sin(\frac{\pi}{2}F) = r(F) = -I.$$