SERIA 1 28.02.2020

DATA ZWROTU: 6.03.2020

ZADANIE 1.1

Korzystając ze wzorów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ oraz przedstawiając funkcję podcałkową w postaci sumy szeregu funkcyjnego wyprowadzić wzory:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^{\infty} \log\left(1 + e^{-x}\right)dx = \frac{\pi^2}{12}$$

Starannie sprawdzić, czy spełnione są założenia używanych twierdzeń

ZADANIE 1.2

Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x}{1 + n^2 x^2}$ jest klasy C^1 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ZADANIE 1.3

Wykazać istnienie oraz znaleźć wartość granicy

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx + 2}{(n+1)(n^2 x + 1)}$$

ZADANIE 1.2

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x}{1+n^2x^2}}$$

$$u_n(x) = \frac{\sqrt{n}\,x}{1+n^2x^2} \qquad u_n(0) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} u_n(x) = \lim_{x\to-\infty} u_n(x) = 0$$

$$u_n'(x) = \frac{\sqrt{n}(1+n^2x^2) - 2n^2x\sqrt{n}\,x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{\sqrt{n}\,(1+n^2x^2-2n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{\sqrt{n}\,(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

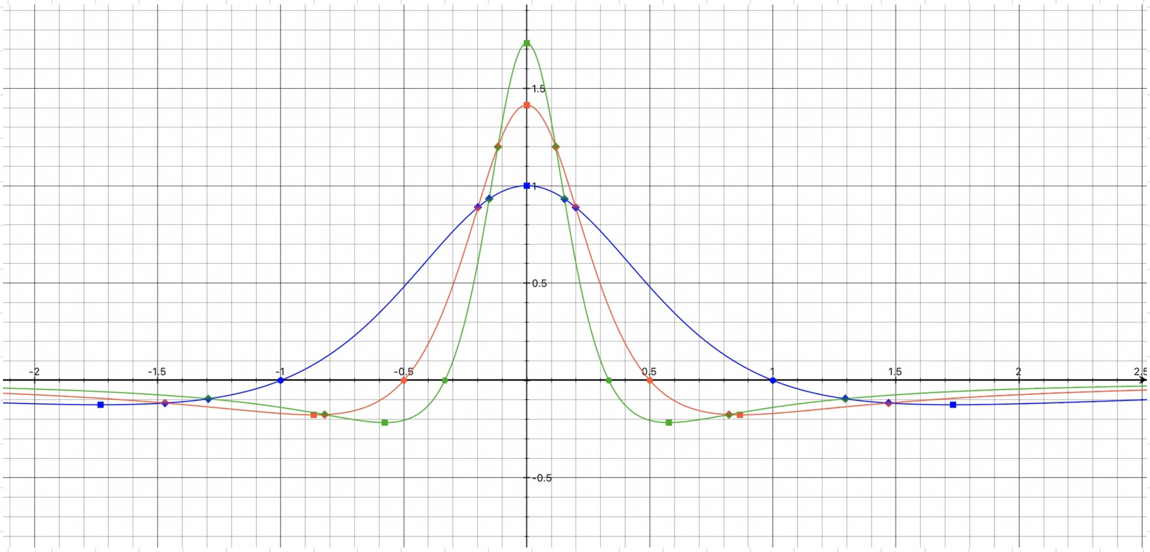
$$u_n''(x) = \sqrt{n}\;\frac{2\cancel{(1+n^2x^2)}\,2n^2x(1-n^2x^2) + 2xn^2(1+n^2x^2)^{\cancel{2}}}{(1+n^2x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \sqrt{n}\,(1+n^2x^2)^{-3}\left[4n^2x - 4n^4x^3 + 2xn^2 + 2n^4x^3\right] =$$

$$= \sqrt{n}\,(1+n^2x^2)^{-3}\left[6n^2x - 2n^4x^3\right] =$$

$$= \sqrt{n}\,(1+n^2x^2)^{-3}\,2n^2x\left[3 - n^2x^2\right] \qquad u_n''(x) = 0 \text{ gdy } x = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{n}$$

$$u_n'(0) = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty, \qquad u_n'\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{n}\right) = \sqrt{n}\,\frac{(1-3)}{(1+3)^2} = -\sqrt{n}\,\frac{2}{16} = -\frac{\sqrt{n}}{8}$$



W otoczeniu $x=0$ zbieżność szeregu pochodnych nie jest jednostajna. W $x=0$ szereg pochodnych w ogóle nie jest zbieżny. Jednak dla $x \in \mathbb{R} \setminus]-a,a[$ i dla wystarczająco dużych n

$$|u_n'(x)| \leq \sqrt{n}\,\frac{1-n^2a^2}{(1+n^2a^2)^2}$$

Szereg $\sum \sqrt{n}\,\frac{1-n^2a^2}{(1+n^2a^2)^2}$ jest zbieżny. Szereg pochodnych jest więc niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zatem $f(x)$ jest różniczkowalna i pochodna jest ciągła na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ZADANIE 1.3

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx+2}{(n+1)(n^2x+1)}}$$

$$u_n(x)=\frac{nx+2}{(n+1)(n^2x+1)}\qquad u_n'(x)=\frac{1}{n+1}\,\frac{n(n^2x+1)-n^2(nx+2)}{(n^2x+1)^2}=\frac{1}{n+1}\,\frac{n-2n^2}{(n^2x+1)^2}=$$

$$=\frac{n}{n+1}\,\frac{1-2n}{(n^2x+1)^2}<0$$ u_n jest malejąca dla dodatnich x.

$$\lim_{x\to\infty}u_n(x)=\frac{n}{(n+1)n^2}=\frac{1}{(n+1)n}$$

Dla $x\geq 1$ $u_n(x)\leqslant\frac{n+2}{(n+1)(n^2+1)}$. Szereg $\sum\frac{n+1}{(n+1)(n^2+1)}$ jest zbieżny. $\sum u_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na mocy kryterium Weierstrassa dla $x\in[1,+\infty[$. Można zatem zamienić kolejność sumowania i przechodzenie do granicy.

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{N\to\infty}\left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}+\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}+\dots\right.$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\left.\dots+\cancel{\frac{1}{N}}-\frac{1}{N+1}\right)=1.$$

ZADANIE 1.1

$$\boxed{\int_0^{\infty}\log\left(1+e^{-x}\right)dx=\frac{\pi^2}{12}}$$

$$\int_0^{\infty}\log(1+e^{-x})dx=-\int_1^0\frac{1}{t}\log(1+t)\,dt=\int_0^1\frac{1}{t}\log(1+t)\,dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n=*$$

$$t=e^{-x}$$

$$dt=-e^{-x}dx\qquad \log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\dots$$

$$\frac{1}{t}dt=-dx\qquad \frac{1}{t}\log(1+t)=1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^2-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\frac{1}{n+1}$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n$ ma promień zbieżności równy 1. Dla $t=1$ szereg jest zbieżny, dlatego na mocy tw. Abela jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$. Można zatem zamienić kolejność sumowania i całkowania:

$$=^{*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{n+1} t^{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{-\log(1-t)(1-t)}{t}$$

$t = 1-e^{-x} \to e^{-x} = 1-t \quad x = -\log(1-t)$

$dt = +e^{-x} dx = (1-t)\,dx$

$$dx = \frac{dt}{(1-t)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = \int_0^1 \frac{-\log(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} dt = \int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\Big) dt =$$

$$= \lim_{r \to 1} \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \lim_{r \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^r \frac{t^{n-1}}{n} dt = *$$

$$\log(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

szereg o promieniu zbieżności równym 1.
Dla $t=1$ niezbieżny. Jednostajna zbieżność
dla $t \in [0,r]$ $r<1$

$$* = \lim_{r \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ten szereg ma promień zbieżności 1 i dla $r=1$ jest zbieżny, dlatego z tw. Abela jest jednostajnie zbieżny dla $r \in [0,1]$ i można wejść z granicą pod sumę.