ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 1.

ZADANIE 1. Zaznaczyć na osi liczbowej i opisać zbiory $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$

$$A=\{x\in\mathbb{R}\ \ x^2-3x<0\}\quad B=\{x^2+3x-4\geqslant 0\}$$

ZADANIE 2. Wyrazić poprzez teoriomnogościowe operacje na zbiorach $A,B,C\subset X$ następujące zbiory

$$\{x\in X:\ x\in A\Rightarrow x\in B\},\ \{x\in X:\ x\in A\Leftrightarrow x\in B\},\ \{x\in X:\ x\in A \text{ albo } x\in B\}$$

$$\{x\in X:\ x\in A\Rightarrow(x\in B\Leftrightarrow x\in C)\}$$

ZADANIE 3. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-3nx+4ny\leqslant 25\}$$

ZADANIE 4. Znaleźć zbiory

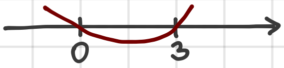
$$P=\bigcup_{t\in[0,1]}A_t\quad \text{i}\quad S=\bigcap_{t\in[0,1]}A_t\quad \text{jeśli}\quad A_t=[t,2t+1]\times[-t,t+1]$$

ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 1.

ZADANIE 1. Zaznaczyć na osi liczbowej i opisać zbiory $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$

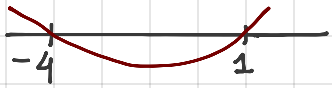
$$A=\{x\in\mathbb{R}\ \ x^2-3x<0\}\qquad B=\{x^2+3x-4\geqslant 0\}$$

$x^2-3x<0 \Rightarrow x(x-3)<0$

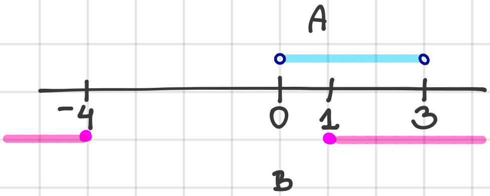


$x\in\,]0,3[\qquad A=\,]0,3[$

$x^2+3x-4\geqslant 0\qquad (x+4)(x-1)\geqslant 0$



$B=\,]-\infty,-4]\cup[1,\infty[$



$A\cup B=\,]-\infty,-4]\cup\,]0,+\infty[$

$A\cap B=[1,3[$

$A\setminus B=\,]0,1[\qquad B\setminus A=\,]-\infty,-4]\cup[3,+\infty[$

Inny sposób zapisania tego samego:

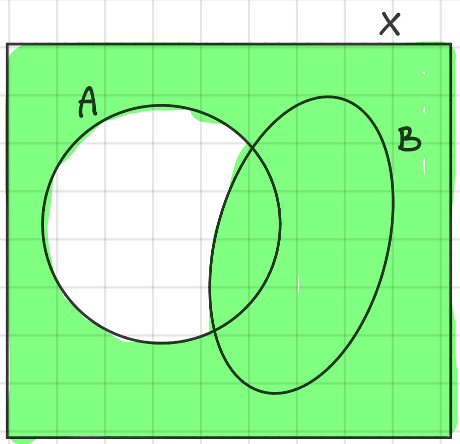
$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}:\ x\leqslant -4 \text{ lub } x>0\}\quad A\cap B=\{x\in\mathbb{R}:\ 1\leqslant x<3\}\quad A\setminus B=\{x\in\mathbb{R}:\ 0<x<1\}$

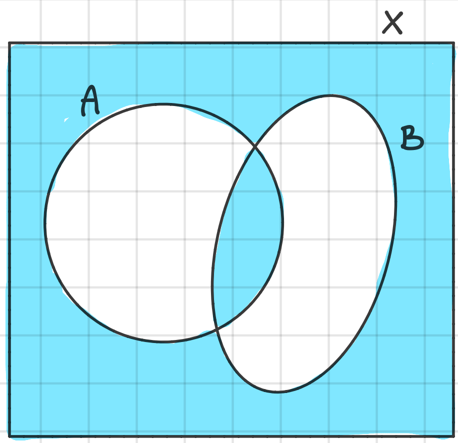
$B\setminus A=\{x\in\mathbb{R}:\ x\leqslant 4 \text{ lub } x\geqslant 3\}$

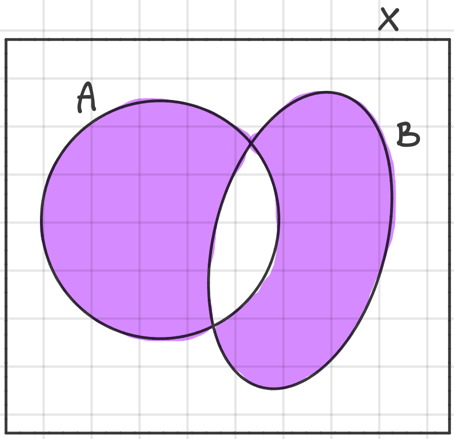
ZADANIE 2 Wyrazić poprzez teoriomnogościowe operacje na zbiorach $A,B,C\subset X$ następujące zbiory

$\underbrace{\{x\in X:\ x\in A\Rightarrow x\in B\}}_{Z_1}$, $\underbrace{\{x\in X:\ x\in A\Leftrightarrow x\in B\}}_{Z_2}$, $\underbrace{\{x\in X:\ x\in A \text{ albo } x\in B\}}_{Z_3}$

$\underbrace{\{x\in X:\ x\in A\Rightarrow(x\in B\Leftrightarrow x\in C)\}}_{Z_4}$







Z_1: Do zbioru Z_1 należą te elementy x dla których prawdziwy jest warunek

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Warunek ma postać implikacji, która jest prawdziwa niemal zawsze, z wyjątkiem sytuacji kiedy poprzednik jest prawdziwy i następnik fałszywy, w naszym przypadku $x \in A$ i $x \notin B$ tzn $x \in A \setminus B$. Wniosek

$$Z_1 = X \setminus (A \setminus B) = A' \cup (A \cap B)$$

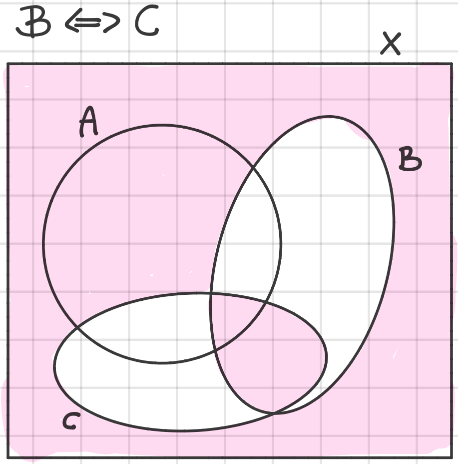
Z_2: Równoważność to koniunkcja dwóch implikacji. Korzystając z Z_1 dostajemy

$$Z_2 = (A \cup B)' \cup (A \cap B)$$

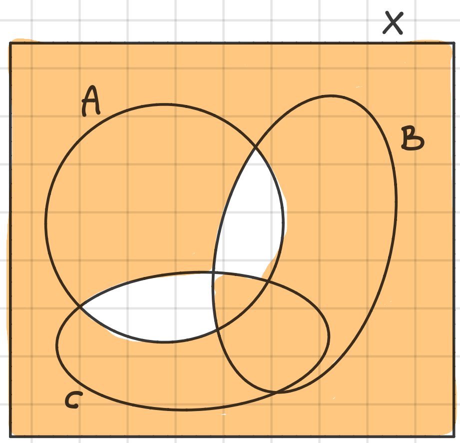
$Z_3 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \div B$ Różnica symetryczna

Z_4: Korzystamy z Z_1 i Z_2

$B \Leftrightarrow C$



Z_4



ZADANIE 3 Opisać i naszkicować na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3nx+4ny \leq 25\}}_{A_n}$$

$(x,y)\in X$ jeśli $(x,y)\in A_n$ dla przynajmniej jednego n. Można to zapisać tak:

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists_{n\in\mathbb{N}}\ (x,y)\in A_n\}$$

$$x^2+y^2-n(3x-4y)\leq 25$$

$$-n(3x-4y)\leq 25-(x^2+y^2)$$

$$n(4y-3x)\leq 25-(x^2+y^2)$$

gdy $4y-3x<0$: $\quad n \geq \dfrac{25-(x^2+y^2)}{4y-3x}$ ②

gdy $4y-3x=0$: $\quad \forall n$ nierówność ma postać $0\leq 25-(x^2+y^2)$, $\quad (x^2+y^2)\leq 25$ ③

gdy $4y-3x>0$: $\quad n\leq \dfrac{25-(x^2+y^2)}{4y-3x}$ ①

① Liczba naturalna mniejsza od ułamka istnieje gdy ułamek jest większy od 1. mamy więc

$$\frac{25-x^2-y^2}{4y-3x}\geq 1 \qquad \frac{25-x^2-y^2-4y+3x}{4y-3x}\geq 0$$

dokładając założenie $4y-3x>0$

mamy

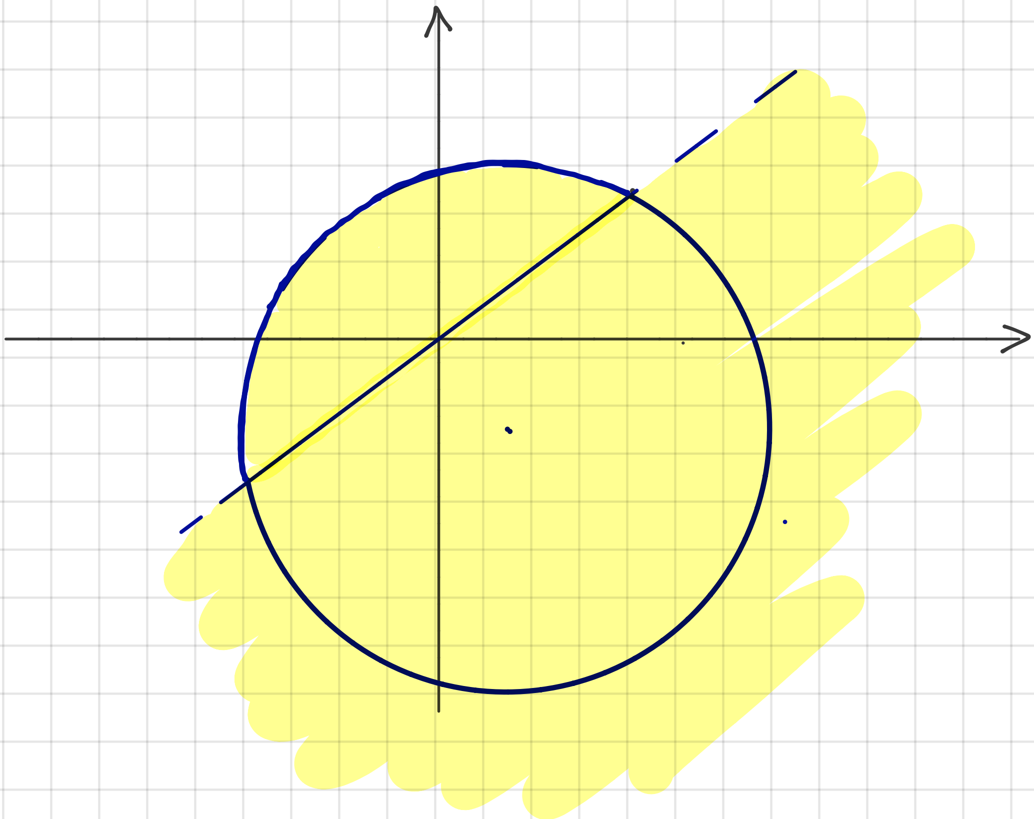
$$25-x^2-y^2-4y+3x\geq 0 \qquad x^2+y^2+4y-3x\leq 25 \qquad \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}+(y+2)^2-4\leq 25$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2\leq 29+\tfrac{9}{4} = 31\tfrac{1}{4} = \frac{125}{4} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

② Liczba naturalna większa od czegokolwiek istnieje zawsze, więc pozostaje $4y-3x<0$

Zróbmy rysunek, a potem dodamy punkt 3.

$$4y-3x=0 \implies y=\tfrac{3}{4}x \qquad \begin{matrix} >0 \text{ nad prostą} \\ <0 \text{ pod prostą}\end{matrix}$$



Do zbioru należą punkty nad prostą i wewnątrz okręgu oraz pod prostą i gdziekolwiek

Jeśli zaś jesteśmy na prostej, tzn $4y-3x=0$ to warunek $\exists n\in\mathbb{N}: x^2+y^2\leq 25$ sprowadza się do prawdziwości nierówności $x^2+y^2\leq 25$ zatem zachodzi wewnątrz i na brzegu okręgu o środku w O i promieniu 5. Punkty przecięcia okręgu $(x-\frac{3}{2})^2+(y+2)^2=\frac{125}{4}$ leżą dokładnie na brzegu okręgu $x^2+y^2=5$. Zatem do zbioru dołączamy odcinek prostej leżący wewnątrz okręgu.

ZADANIE: Znaleźć zbiory

$$P=\bigcup_{t\in[0,1]} A_t \quad \text{i} \quad S=\bigcap_{t\in[0,1]} A_t \quad \text{jeśli} \quad A_t=[t,2t+1]\times[-t,t+1]$$

$$A_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : t\leq x\leq 2t+1 \ \text{i}\ -t\leq y\leq t+1\}$$

$$P=\{(x,y): \exists t\in[0,1] : (x,y)\in A_t\}$$

$0\leq t$ $\quad t\leq 1$ $\quad t\leq x$ $\quad x\leq 2t+1$ $\quad -t\leq y$ $\quad y\leq t+1$

$\quad t\geq \frac{x-1}{2}$ $\quad t\geq -y$ $\quad y-1\leq t$

$\boxed{0 \leq t}$ $\quad \boxed{t \leq 1}$ $\quad \boxed{t \leq x}$ $\quad x \leq 2t+1 \quad -t \leq y \quad y \leq t+1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \boxed{t \geq \frac{x-1}{2}} \quad \boxed{t \geq -y} \quad \boxed{y-1 \leq t}$

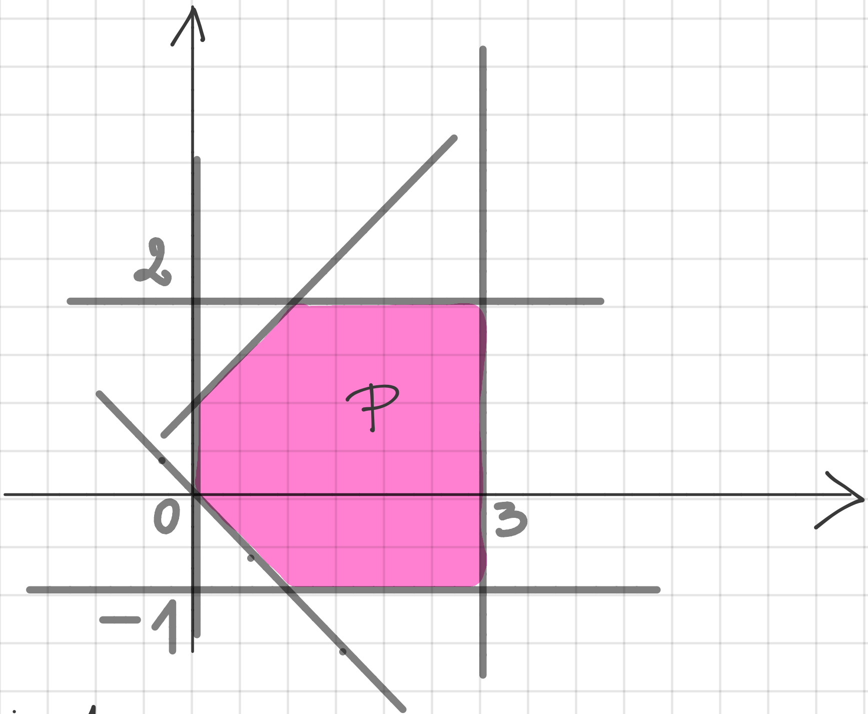
$t \geq \max\{0, \frac{x-1}{2}, -y, y-1\}$

$t \leq \min\{1, x\}$

żeby t istniało potrzeba i wystarcza aby każde z ograniczeń górnych było większe niż każde z dolnych:

$\cancel{0 \leq 1} \quad \frac{x-1}{2} \leq 1 \quad -y \leq 1 \quad y-1 \leq 1 \quad 0 \leq x \quad \frac{x-1}{2} \leq x \quad -y \leq x \quad y-1 \leq x$

$x \leq 3 \quad y \geq -1 \quad y \leq 2 \quad x \geq 0 \quad x \geq \cancel{-1} \quad y \geq -x \quad y \leq x+1$



S jest przecięciem zbiorów A_t, tzn

$S = \{(x,y) : \forall t \in [0,1] \ (x,y) \in A_t\}$

$\forall t \in [0,1] \quad t \leq x \quad x \leq 2t+1 \quad -t \leq y \quad y \leq t+1$

$\left.\begin{array}{l} \forall t \in [0,1] \quad x \geq t \quad \text{oznacza} \quad x \geq 1 \\ \forall t \in [0,1] \quad x \leq 2t+1 \quad \text{oznacza} \quad x \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$

$\forall t \in [0,1] \quad y \geq -t \quad \text{oznacza} \quad y \geq 0$

$\forall t \in [0,1] \quad y \leq t+1 \quad \text{oznacza} \quad y \leq 1$