# ANALIZA R 2018/2019 ĆWICZENIA 02 8.10.2018

**ZADANIE 1** DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA Wykazać tożsamość

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup$$
$$\cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

dla dowolnej rodziny zbiorów $A_1, \dots, A_n$.

**ZADANIE 2** Dla danego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \dots$ określmy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \qquad \limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Wykazać, że zawsze $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz

sprawdzić to w przypadku $A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7}\right]$.

**ZADANIE 3** Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad h(k) = 2k^2 - 3k + 1$$

**ZADANIE 4** Odwzorowanie $f: X \to X$ spełnia warunek

$$\forall x \in X \ \exists n \in \mathbb{N}: \ f^n(x) = x$$

Udowodnić, że $f$ jest bijekcją. $f^n$ oznacza $n$-krotne złożenie $f$ ze sobą, tzn

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n}$$

**ZADANIE 5** Podać przykłady bijekcji między $X$ i $Y$ jeśli

$X = [0,1[$, $Y = [0,1]$; $X = ]0,1[$, $Y = [-2,2] \setminus \{-1,1\}$; $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$

**ZADANIE 1** DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA Wykazać tożsamość

$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}_{L} = \underbrace{(A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}_{P}$$

dla dowolnej rodziny zbiorów $A_1, \dots, A_n$.

Zawieranie $P \subset L$ jest oczywiste. Wykażemy zawieranie $L \subset P$.

Niech $x \in L$. Oznacza to, że istnieje $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takie, że $x \in A_k$. Oznaczmy przez $I(x)$ zbiór tych $k$, że $x \in A_k$. Może się zdarzyć, że $I(x) = \{1, \dots, m\}$, wtedy $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$ więc $x \in P$. Jeśli $I(x) \neq \{1, \dots, m\}$ to istnieje przynajmniej jeden indeks $k \notin I(x)$. Mogą zdarzyć się dwie sytuacje

(1) $\exists k \in \{1, \dots, m-1\}: k \in I(x)$ i $k+1 \notin I(x)$ (2) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ $k \notin I(x)$ lub $k+1 \in I(x)$

W przypadku (1) $x \in A_k \setminus A_{k+1} \subset P$

Przypadek (2) rozważmy zaczynając od $k=1$

$1 \in I(x)$ wtedy $2 \in I(x)$ wtedy $3 \in I(x)$ itd aż do $n \in I(x)$ czyli wracamy do omówionego przypadku $I(x) = \{1, \dots, m\}$

$1 \notin I(x)$ wtedy $\to 2 \in I(x) \leftarrow$ dalej wszystkie należą i $x \in A_n \setminus A_1 \subset P$

$\searrow 2 \notin I(x) \nearrow 3 \in I(x)$ i wszystkie dalej $\to x \in A_n \setminus A_1 \subset P$

$\searrow 3 \notin I(x) \dots$ podążając tą drogą aż do

$n-1 \notin I(x)$ mamy

$n-1 \notin I(x) \nearrow n \in I(x)$ i $x \in A_n \setminus A_1$

$\searrow n \notin I(x) \leftarrow$ tak być nie może bo $I(x) \neq \emptyset$

Ostatecznie w przypadku (2) $x \in A_m \setminus A_1$.

**ZADANIE 3** Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowanie, opisać jego zbiór wartości i poziomice.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

Oznaczmy $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Zauważmy, że zarówno $x$ jak i $y$ są ograniczone

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 + \frac{2}{1+t^2}$$

$1+t^2 \geqslant 1$ $\quad 1/_{1+t^2} \leqslant 1$ $\quad 0 \leqslant \dfrac{2}{1+t^2} \leqslant 2$

$$-1 \leqslant -1 + 2/_{1+t^2} \leqslant 1$$

$y(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ Ogroniczoność $y(\cdot)$ jest trudniej stwierdzić „na oko" ale też można. Do stwierdzenia niesurjektywności jednak wystarcza obserwacja, że $-1\leq x(t)<1$

Badamy injektywność:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-s^2}{1+s^2} \quad ; \quad \frac{2t}{1+t^2}=\frac{2s}{1+s^2}$$

$$(1-t^2)(1+s^2)=(1-s^2)(1+t^2) \qquad \cancel{2}t(1+s^2)=\cancel{2}s(1+t^2)$$

$$\cancel{1}-t^2+s^2-\cancel{t^2s^2}=\cancel{1}-s^2+t^2-\cancel{t^2s^2}$$

$$s^2-t^2=t^2-s^2 \rightarrow s^2-t^2=-(t^2-s^2) \Rightarrow s^2-t^2=0 \qquad s=\pm t \qquad \boxed{s=t}$$

Zbiór wartości: policzmy $x^2+y^2$

$$\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$$

obraz zawarty jest więc w okręgu o promieniu 1.

Żeby się przekonać że nie każdy punkt okręgu jest w obrazie popatrzmy na wzory

$$\cos\varphi=\frac{\cos^2\varphi/2-\sin^2\varphi/2}{\cos^2\varphi/2+\sin^2\varphi/2}=\frac{1-tg^2\varphi/2}{1+tg^2\varphi/2}\overset{t=tg\,\varphi/2}{=}\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\varphi=\frac{2\sin\varphi/2\cos\varphi/2}{\cos^2\varphi/2+\sin^2\varphi/2}=\frac{2tg\,\varphi/2}{1+tg^2\varphi/2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$]-\pi,\pi[\ni\varphi\longrightarrow(\cos\varphi,\sin\varphi)\in\mathbb{R}^2$ jest parametryzacją okręgu bez $(-1,0)$

$$\left(\frac{1-tg^2\varphi/2}{1+tg^2\varphi/2},\frac{2tg\,\varphi/2}{1+tg^2\varphi/2}\right)$$

Odwzorowanie $]-\pi,\pi[\ni\varphi\longmapsto t(\varphi)=tg\,\varphi/2\in\mathbb{R}$ jest bijekcją, zatem

$t\mapsto\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ jest parametryzacją okręgu bez punktu $(-1,0)$

Podsumowując, $f$ nie jest surjekcją, jest injekcją, obrazem $f$ jest zbiór $\{(x,y): x^2+y^2=1\}\setminus\{(-1,0)\}$ a poziomice są jednopunktowe.

$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$

Odwzorowanie nie jest injektywne gdyż przyjmuje jednakowe wartości w punktach $(x,y)$ i $(x,-y)$.

W punktach $(x,0)$ dla $x \neq 0$ g ma postać $g(x,0) = \frac{1}{x}$ funkcja $x \mapsto 1/x$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste poza zerem. Dodatkowo $g(0,y) = 0$, zatem g jest surjekcją.

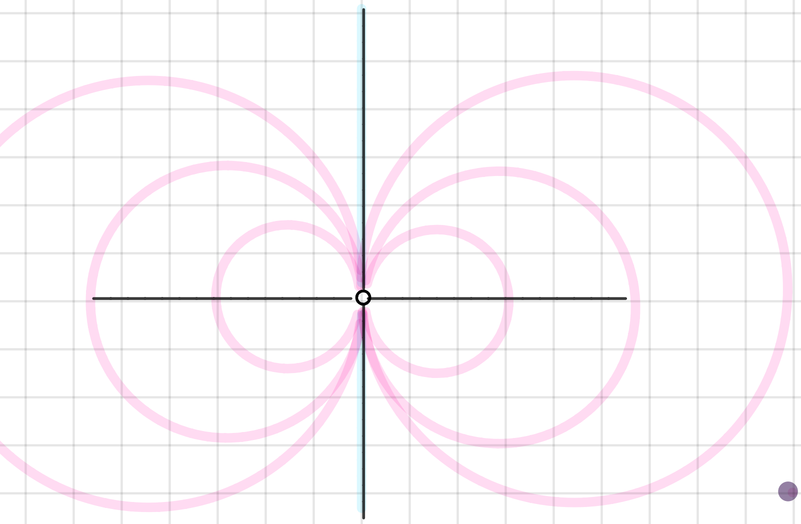
Poziomice: $\frac{x}{x^2+y^2} = a \quad \frac{x - ax^2 - ay^2}{x^2+y^2} = 0 \quad ax^2 + ay^2 - x = 0$

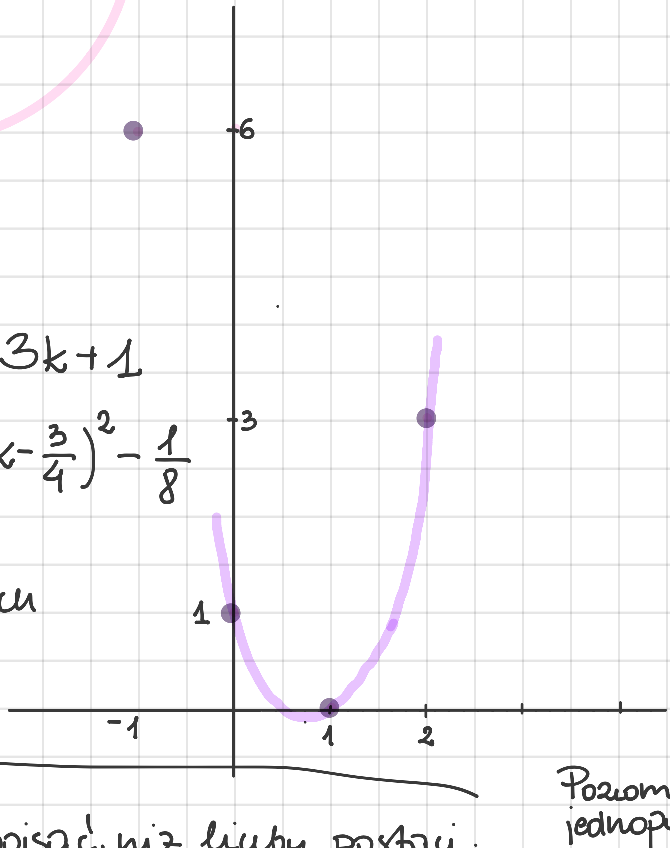
dla $a=0$ poziomicą jest zbiór $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

dla $a \neq 0$

$$x^2 - \frac{1}{a}x + y^2 = 0 \quad \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2} + y^2 = 0 \quad \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$$

Poziomica jest okręgiem o środku w $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$, promieniu $\left|\frac{1}{2a}\right|$ bez punktu $(0,0)$






$h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad h(k) = 2k^2 - 3k + 1$

$h(k) = 2\left(k - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 1 = 2\left(k - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

h nie przyjmuje wartości ujemnych to nie jest surjektywne. Jest injektywne

$h(k) = (k-1)(2k-1)$ ⟵ Poziomice jednopunktowe.

Obrazu nie potrafię lepiej opisać niż liczby postaci.

## ZADANIE 4 Odwzorowanie $f: X \to X$ spełnia warunek

$$\forall x \in X \ \exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x$$

Udowodnić, że $f$ jest bijekcją. $f^n$ oznacza $n$-krotne złożenie $f$ ze sobą, tzn

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n}$$

Niech $n: X \to \mathbb{N}$ będzie funkcją daną warunkiem $n(x)$ jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą $f^n(x) = x$.

Surjektywność: Weźmy $x \in X$ i $n(x)$. Wtedy

$$x = f^{n(x)}(x) = f\left(f^{n(x)-1}(x)\right) \text{ tzn } x = f(y) \text{ dla } y = f^{n(x)-1}(x)$$

Injektywność: Niech $x, x'$ będą takie, że $f(x) = f(x')$ wtedy

$$x = f^{n(x)}(x) = \underbrace{f^{n(x)} \circ f^{n(x)} \circ \dots \circ f^{n(x)}}_{n(x')}(x) = f^{n(x)n(x')}(x) \underset{\text{bo } f(x) = f(x')}{=} f^{n(x)n(x')}(x') =$$

$$= \underbrace{f^{n(x')} \circ \dots \circ f^{n(x')}}_{n(x)}(x') = x'$$

Zatem $f$ injektywne ■

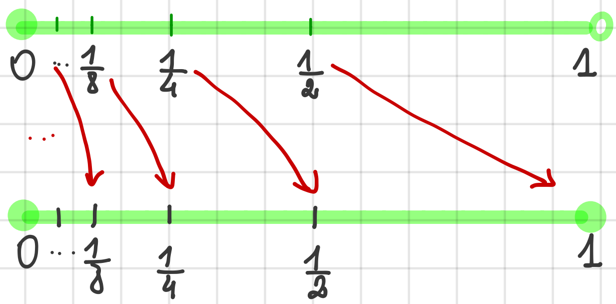
## ZADANIE 5 Podać przykłady bijekcji między $X$ i $Y$ jeśli

$X = [0,1[,\ Y = [0,1]$; $X = ]0,1[,\ Y = [-2,2] \setminus \{-1,1\}$; $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ Y = \mathbb{N}$

$f: [0,1[ \to [0,1]$

$f(x) = x$ dla $x \neq \frac{1}{2^n}$

$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$




$g: ]0,1[ \to [-2,2] \setminus \{-1,1\}$

$g(x) = 4x - 2$ dla $x \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \quad g\left(\frac{3}{4}\right) = 2$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1,1)^{1}$ | $(1,2)^{2}$ | $(1,3)^{6}$ | $(1,4)^{7}$ | $(1,5)^{15}$ | $(1,6)^{16}$ | |
| 2 | $(2,1)^{3}$ | $(2,2)^{5}$ | $(2,3)^{8}$ | $(2,4)^{14}$ | $(2,5)^{17}$ | $(2,6)$ | |
| 3 | $(3,1)^{4}$ | $(3,2)^{9}$ | $(3,3)^{13}$ | $(3,4)^{18}$ | $(3,5)$ | $(3,6)$ | |
| 4 | $(4,1)^{10}$ | $(4,2)^{12}$ | $(4,3)^{19}$ | $(4,4)$ | $(4,5)$ | $(4,6)$ | |
| ⋮ | 11 | 20 | | | | | |

$(1,1) \mapsto 1$
$(1,2) \mapsto 2$
$(2,1) \mapsto 3$
$(3,1) \mapsto 4$
$(2,2) \mapsto 5$
$(1,3) \mapsto 6$
$(1,4) \mapsto 7$
$(2,3) \mapsto 8$
⋮

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

**ZADANIE 2** Dla danego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ określmy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \qquad \limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

Wykazać, że zawsze $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ oraz sprawdzić to w przypadku $A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7}\right]$.

$x \in \liminf A_n \equiv$ x należy do prawie wszystkich $A_n$, tzn do wszystkich poza skończoną liczbą

$x \in \limsup A_n \equiv$ x należy do nieskończenie wielu $A_n$

Przetłumaczenie definicji formalnych na język naturalny powoduje, że zawieranie staje się oczywiste.

$A_n = [a_n, b_n] \quad a_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2k+1} \nearrow 1 \qquad a_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+2} \searrow -1$

$b_1 = 11/5 = 2\frac{1}{5} \quad b_2 = 7/3 = 2\frac{1}{3} \quad b_3 = 3 \quad$ dla $n \geq 4$ $b_n \nearrow 2$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = ]-1, 3] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$

$\liminf A_n = [1, 2[ \qquad \limsup A_n = ]-1, 2[$