ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 02 8.10.2018

ZADANIE 1 DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA Wykazać tożsamość

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup$$
$$\cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

dla dowolnej rodziny zbiorów $A_1, \dots, A_n$.

ZADANIE 2 Dla danego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \dots$ określmy

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \qquad \limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} A_k$$

Wykazać, że zawsze $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz

sprawdzić to w przypadku $A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{n+1}, \frac{4n-15}{2n-7} \right]$.

ZADANIE 3 Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowanie, opisać jego zbiór wartości i poziomice.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$h: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad h(k) = 2k^2 - 3k + 1$$

ZADANIE 4 Odwzorowanie $f: X \longrightarrow X$ spełnie warunek

$$\forall x \in X \ \exists n \in \mathbb{N} : \ f^n(x) = x$$

Udowodnić, że f jest bijekcją. f^n oznacza n-krotne złożenie f ze sobą, tzn

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n}$$

ZADANIE 5 Podać przykłady bijekcji między X i Y jeśli

$X = [0,1[, \ Y = [0,1]$; $X =]0,1[, \ Y = [-2,2] \setminus \{-1,1\}$; $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ Y = \mathbb{N}$