ANALIZA R 2018/2019 ĆWICZENIA 03 12.10.2018

ZADANIE 1 DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA Znaleźć najmniejszą relację równoważności w zbiorze $X=\{a,b,c,d\}$ zawierającą (a,c) i (a,d). Relacja ma być najmniejsza jako podzbiór $X\times X$

ZADANIE 2 W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ definiujemy relację R: x jest w relacji R z y jeśli $\exists n\in\mathbb{N}: 10^n(x-y)\in\mathbb{Z}$

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : \exists n\in\mathbb{N}\ 10^n(x-y)\in\mathbb{Z}\}$$

sprawdzić, że jest to relacja równoważności, opisać klasy abstrakcji

ZADANIE 3 W zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(m,n)\sim(m',n') \iff m+n'=m'+n$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Sprawdzić, że działania

$$[(m,n)]+[(m',n')]=[(m+m',n+n')]$$
$$[(m,n)]\cdot[(m',n')]=[(mm'+nn', mn'+n'm)]$$

są dobrze określone na klasach równoważności.

ZADANIE 4 W zadaniu 3 skonstruowaliśmy $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Wprowadzając stosowną relację równoważności w $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ skonstruować $\mathbb{Q}$ wraz z działaniami $+$ i $\circ$

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

Jak dowodzi się metodą indukcji obejrzymy na następujących przykładach:

Udowodnić metodą indukcji:

(1) $$1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2) Jeśli każda z liczb $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ jest równa $+1$ lub -1 to

$$\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\varepsilon_3\sqrt{\cdots\varepsilon_n\sqrt{2}}}}=2\sin\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}{2^{n-1}}\right)$$

(3) ZASADA MINIMUM: Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy

ZASADA MINIMUM: Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

DOWÓD a.a. Załóżmy że $S \subset \mathbb{N}$ nie ma elementu najmniejszego. Oznaczmy $T = \mathbb{N} \setminus S$

(1) Liczba 1 należy do T, bo gdyby tak nie było to $1 \in S$ byłoby elementem S i wtedy S miałoby element najmniejszy

(2) Założenie indukcyjne: $\forall l \leq k \quad l \in T$
Teza indukcyjna: $l+1 \in T$
Gdyby $l+1$ nie należało do T, to należałoby do S i było jego elementem najmniejszym.

Na mocy **Mocnej Zasady Indukcji** $T = \mathbb{N}$, zatem $S = \emptyset$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Dla $n=1$ $\quad L = 1,\ P = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \quad$ o.k.

Założenie indukcyjne: Wzór zachodzi dla $n=k$
Teza indukcyjna: Wzór zachodzi dla $n=k+1$

$$1 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = (k+1)\frac{1}{6}\left[2k^2 + k + 6k + 6\right] =$$
$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = \frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)$$

$\blacksquare$

$$\varepsilon_i = \pm 1,\ i \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \dots \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\left[\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} + \dots + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n}{2^{n-1}}\right]\right)$$

Sprawdzamy dla $n=1$: $\quad P = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon_1\right) = 2\varepsilon_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\varepsilon_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = \varepsilon_1 \sqrt{2} = L$

Załóżmy że twierdzenie zachodzi dla układu k liczb $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}$. Dowodzimy dla układu $k+1$ liczb $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \dots \varepsilon_{k+1} \sqrt{2}}} = \varepsilon_1 \sqrt{2 + 2 \sin \varphi}$$

gdzie $\varphi = \frac{\pi}{4}\left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} + \dots + \frac{\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{k+1}}{2^{k-1}}\right]$

$$2+2\sin\varphi = 2(1+\sin\varphi) = 2\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{2+2\sin\varphi} = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

moduł można opuścić gdyż $-2<\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_2\dots\varepsilon_k}{2^{k-1}}<2$

tzn $-\frac{\pi}{4}<\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{4}$ tzn $0<\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$ i sin jest dodatni

$$\varepsilon_1\sqrt{2+2\sin\varphi} = 2\varepsilon_1\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon_1\left(\varepsilon_2+\cdots\right)\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k+1}}{2^k}\right)\right) \blacksquare$$

ZADANIE 1:

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

dane w zadaniu

dodane, bo relacja zwrotna

dodane, bo relacja symetryczna

dodane, bo relacja przechodnia

$R=\{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(c,a),(c,c),(c,d),(d,a),$
$(d,c),(d,d)\}$

$[a]=\{a,c,d\}$ $[b]=\{b\}$

ZADANIE 2 W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ definiujemy relację R: x jest w relacji R z y jeśli $\exists n \in \mathbb{N}$: $10^n(x-y) \in \mathbb{Z}$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : \exists n \in \mathbb{N} \quad 10^n(x-y) \in \mathbb{Z}\}$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności, opisać klasy abstrakcji

Sprawdzamy, że R jest relacją równoważności:

ZWROTNOŚĆ: $(x,x) \in R$ bo $x-x=0$, zatem $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x-x) \cdot 10^n = 0 \in \mathbb{Z}$

SYMETRIA: Jeśli $(x,y) \in R$ to (y,x) także, gdyż

$10^n(x-y) = -10^n(y-x)$ zatem jeśli liczba po lewej jest całkowita, to po prawej też

PRZECHODNIOŚĆ: $(x,y) \in R$ więc $\underbrace{10^n(x-y)}_{k} \in \mathbb{Z}$, $(y,z) \in R$ więc $\underbrace{10^m(y-z)}_{\ell} \in \mathbb{Z}$

Weźmy $\mathbb{Z} \ni 10^m k + 10^n \ell = 10^m 10^n (x-y) + 10^n 10^m (y-z) =$

$= 10^{m+n}(x-y+y-z) = 10^{m+n}(x-z)$ zatem $(x,z) \in R$

Zauważmy, że liczby równoważne mają od pewnego momentu jednakowe rozwinięcia dziesiętne. W szczególności klasa $[0]$ składa się z liczb mających skończone rozwinięcie dziesiętne, tzn liczb postaci

$$p/q \quad q = 2^k 5^\ell \quad k,\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Każda inna klasa $[\alpha] = \alpha + [0] = \{\alpha + \beta : \beta \in [0]\}$

ZADANIE 3 W zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(m,n)\sim(m',n') \iff m+n'=m'+n$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Sprawdzić, że działania

$$[(m,n)]+[(m',n')]=[(m+m',\ n+n')]$$

$$[(m,n)]\cdot[(m',n')]=[(mm'+nn',\ mn'+n'm)]$$

są dobrze określone na klasach równoważności.

Sprawdzenie, że dana relacja jest relacją równoważności jest bardzo proste: zwrotność i symetria są oczywiste. Badamy przechodniość

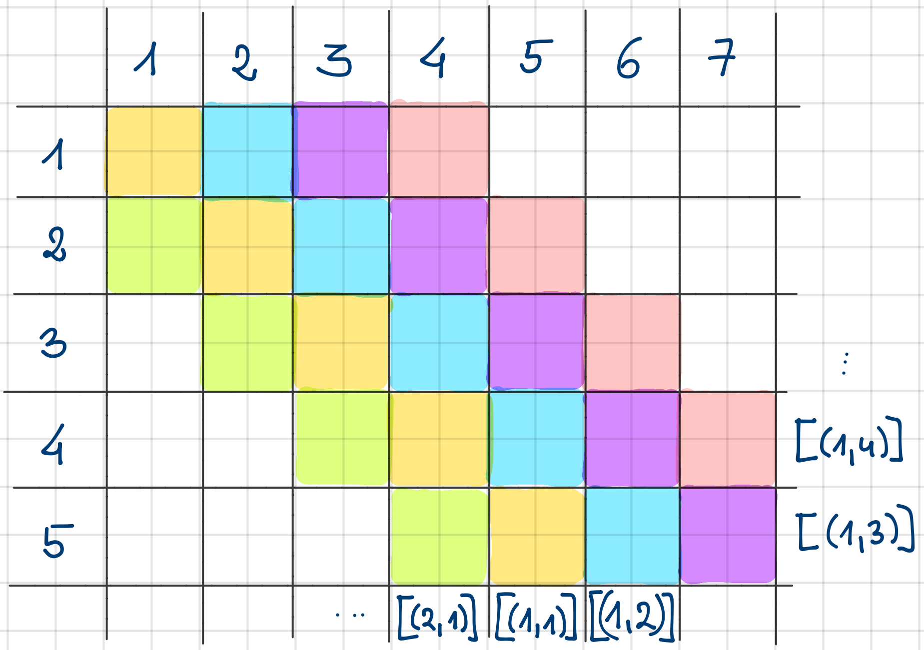
$(m,n)\sim(m',n')$ tzn $m+n'=m'+n$

$(m',n')\sim(m'',n'')$ tzn $m'+n''=m''+n'$

$$\frac{\qquad}{m+\cancel{n'}+\cancel{m'}+n''=\cancel{m'}+n+m''+\cancel{n'}}\;+$$

$$m+n''=m''+n \implies (m,n)\sim(m'',n'')$$

Obrazek – klasy równoważności na kolorowo



Każda klasa ma reprezentanta w którym pierwszy lub drugi wyraz jest równy 1.

Sprawdzamy czy działania są dobrze określone:

$(m,n)\sim(m',n')$ i $(a,b)\sim(a',b')$ $\quad m+n'=m'+n \quad a+b'=a'+b$

$(m,n)+(a,b)=(m+a,\ n+b)$

$(m',n')+(a',b')=(m'+a',\ n'+b')$

$m+a+n'+b'=m'+n+a'+b=m'+a'+n+b$ $\quad$ tzn te dwe są równoważne

Dodawanie nie zależy więc od reprezentanta – jest dobrze określone na klasach równoważności

$(m,n)\cdot(a,b)=(ma+nb,\ mb+na)$

Bierzemy ponownie $(m',n')\sim(m,n)$ i $(a',b')\sim(a,b)$. Pary równoważne różnią się o stałą na obu współrzędnych, zatem

$m'=m+k$ i $n'=n+k$ (lub odwrotnie $m=m'+k$ $n=n'+k$, gdyż $k\geq 0$)

podobnie,

$a'=a+l$, $b'=b+l$ lub odwrotnie $a=a'+l$, $b=b'+l$

Rozważymy tylko jeden przypadek, co jest wystarczające

$(m+k,\ n+k)(a+l,\ b+l)=((m+k)(a+l)+(n+k)(b+l),\ (m+k)(b+l)+(n+k)(a+l))$

$=(ma+ka+ml+kl+nb+kb+nl+kl,\ mb+kb+ml+kl+na+ka+nl+kl)$

$\sim(ma+nb,\ mb+na)$.

Sprawdzamy, że $[(1,1)]$ jest elementem neutralnym dodawania:

$[(m,n)]+[(1,1)]=[(m+1,\ n+1)]=[(m,n)]$

Ponadto $[(m,n)]\cdot[(1,1)]=[(m+n,\ m+n)]=[(1,1)]$. Element $[(n,m)]$ jest przeciwny do $[(m,n)]$: $[(n,m)]+[(m,n)]=[(n+m,\ n+m)]=[(1,1)]$

Elementem neutralnym mnożenia jest $[(2,1)]$

$[(2,1)][(m,n)]=[(2m+n,\ 2n+m)]=[(m,n)]$

$[(1,2)][(m,n)]=[(m+2n),(n+2m)]=[(n,m)]$ – mnożenie przez $[(1,2)]$ zmienia element na przeciwny.

Odwzorowanie

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} \ni [(m,n)] \longmapsto m-n \in \mathbb{Z}$$

zadaje izomorfizm (bijekcja zachowująca działania)

ZADANIE 4 W zadaniu 3 skonstruowaliśmy $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Wprowadzając stosowną relację równoważności w $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ skonstruować $\mathbb{Q}$ wraz z działaniami $+$ i $\circ$

$$(k,m)\sim(l,m) \iff km = ln$$

sprawdzamy przechodniość:

$$(k,n)\sim(l,m) \text{ i } (l,m)\sim(p,r) \Rightarrow km=ln \text{ i } lr = mp \Rightarrow k\cancel{m}\cancel{l}r=\cancel{l}n\cancel{m}p$$

$$\Rightarrow kr = mp \Rightarrow (k,m)\sim(p,r)$$

Działania:

$$[(k,n)]\cdot[(l,m)] = [(kl, nm)]$$

$$[(k,n)]+[(l,m)] = [(km+ln, mn)]$$

Sprawdzenie poprawności definicji działań jest proste i nudne.