# ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 03 12.10.2018

**ZADANIE 1** DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA Znaleźć najmniejszą relację równoważności w zbiorze $X=\{a,b,c,d\}$ zawierającą $(a,c)$ i $(a,d)$. Relacja ma być najmniejsza jako podzbiór $X\times X$

**ZADANIE 2** W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ definiujemy relację $R$: $x$ jest w relacji $R$ z $y$ jeśli $\exists n\in\mathbb{N}: 10^n(x-y)\in\mathbb{Z}$

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : \exists n\in\mathbb{N}\ \ 10^n(x-y)\in\mathbb{Z}\}$$

sprawdzić, że jest to relacja równoważności, opisać klasy abstrakcji

**ZADANIE 3** W zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(m,n)\sim(m',n') \iff m+n'=m'+n$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Sprawdzić, że działania

$$[(m,n)]+[(m',n')]=[(m+m',n+n')]$$

$$[(m,n)]\cdot[(m',n')]=[(mm'+nn',mn'+n'm)]$$ są dobrze określone na klasach równoważności.

**ZADANIE 4** W zadaniu 3 skonstruowaliśmy $(\mathbb{Z},+,\cdot)$. Wprowadzając stosowną relację równoważności w $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ skonstruować $\mathbb{Q}$ wraz z działaniami $+$ i $\circ$

## ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

Jak dowodzi się metodą indukcji obejrzymy na następujących przykładach:

Udowodnić metodą indukcji:

(1) $$1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2) Jeśli każda z liczb $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ jest równa $+1$ lub $-1$ to

$$\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\varepsilon_3\sqrt{\dots\varepsilon_n\sqrt{2}}}}=2\sin\frac{\pi}{4}\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}{2^{n-1}}\right)$$

(3) ZASADA MINIMUM: Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ ma element najmniejszy