ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 04 15.10.2018

WAŻNE NIERÓWNOŚCI

Udowodnić (na przykład indukcyjnie)

(1) NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO: $\forall x \geq -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

(2) NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO (między średnimi)

Dla $a_1, \dots, a_n$ nieujemnych definiujemy $A(a_1,\dots,a_n) = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, $G(a_1,\dots,a_n) = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$

Wykazać, że $A(a_1,\dots,a_n) \geq G(a_1,\dots,a_n)$

Jeśli ponadto $H(a_1,\dots,a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$ dla $a_i \neq 0$

$$G(a_1,\dots,a_n) \geq H(a_1,\dots,a_n)$$

(3) NIERÓWNOŚĆ JENSENA $I \subset \mathbb{R}$ $f: I \to \mathbb{R}$ mówimy, że f jest wypukła na I jeśli

odcinek

$$\forall a,b \in I \ \forall\, 0 \leq q \leq 1$$
$$f(qa+(1-q)b) \leq qf(a)+(1-q)f(b)$$

Wykazać że dla funkcji wypukłej zachodzi

$$x_1,\dots,x_n \in I, \ q_1+\dots+q_n = 1, \ q_i \geq 0 \Rightarrow f(q_1x_1+\dots+q_nx_n) \leq q_1f(x_1)+\dots+q_nf(x_n)$$

(4) NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)$$

NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO:

Dla $n=1$ nierówność staje się równością

Zakładamy, że $(1+x)^k \geq 1+kx$

Dowodzimy, że $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+x+kx+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2$$
$$\geq 1+(k+1)x \quad \blacksquare$$

NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO

Dla $n=1$ nierówność staje się równością

Zakładamy $A(a_1,\dots,a_k) \geq G(a_1,\dots,a_k)$

Dowodzimy $A(a_1,\dots,a_k,a_{k+1}) \geq G(a_1,\dots,a_k,a_{k+1})$

$$A(a_1,\dots,a_k,a_{k+1}) = \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1}}{k+1} = \frac{k(a_1+\dots+a_{k+1})}{k(k+1)} =$$
$$= \frac{k(a_1+\dots+a_k)+ka_{k+1}}{k(k+1)} = \frac{(k+1)(a_1+\dots+a_k)-(a_1+\dots+a_k)+ka_{k+1}}{(k+1)k} =$$
$$= \frac{\cancel{(k+1)}(a_1+\dots+a_k)}{k\cancel{(k+1)}} + \frac{[ka_{k+1}-(a_1+\dots+a_k)]/k}{k+1} =$$
$$[ka_{k+1}-(a_1+\dots+a_k)]/k = \Delta$$
$$= A_k(a_1,\dots,a_k) + \frac{\Delta}{k+1}$$

Uogólnienie nierówności Bernoulliego:

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq a^n\left(1+n\frac{b}{a}\right) = a^n + na^{n-1}b$$

$a+b>0$

$a>-b$

$$\left(A(a_1,\dots,a_k)+\frac{\Delta}{k+1}\right)^{k+1} \geq A(\dots)^{k+1} + A(\dots)^k\cancel{(k+1)}\frac{\Delta}{\cancel{k+1}} =$$
$$= A^{k+1}(\dots) + A^k(\dots)\left[a_{k+1} - A(\dots)\right] =$$
$$= A^{k+1}(\dots) + A^k(\dots)a_{k+1} - A^{k+1}(\dots) = A^k(\dots)a_{k+1} \geq G^k(a_1,\dots,a_k)a_{k+1} =$$
$$= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}$$

$$A(a_1,\dots,a_{k+1})^{k+1} = \left(A(a_1,\dots,a_k) + \frac{\Delta}{k+1}\right)^{k+1} \geq a_1 \cdots a_{k+1}$$

$$A(a_1,\dots,a_k) \geq \sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_{k+1}} = G(a_1,\dots,a_{k+1}) \quad \blacksquare$$

$$H(a_1,\dots,a_k) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_k}\right)} \leq \frac{1}{G\left(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_k}\right)} = G(a_1,\dots,a_k)$$

$$A(a_1,\dots,a_n) \geq G(a_1,\dots,a_n) \geq H(a_1,\dots,a_n)$$

NIERÓWNOŚĆ JENSENA

Dla $n=2$ nierówność jest tożsama z definicją funkcji wypukłej.

Zakładamy $f(q_1x_1+\dots+q_kx_k) \leq q_1f(q_1)+\dots+q_kf(x_k)$

Dowodzimy $f(q_1x_1+\dots+q_{k+1}x_{k+1}) \leq q_1f(q_1)+\dots+q_{k+1}f(x_{k+1})$

Oznaczamy $\bar{q}\bar{x} = q_1x_1+\dots+q_kx_k$

Tzn $\bar{q} = q_1+\dots+q_k = (1-q_{k+1})$

$$\bar{x} = \frac{q_1x_1+\dots+q_kx_k}{\bar{q}}$$

$$f(q_1x_1+\dots+q_kx_k+q_{k+1}x_{k+1}) = f(\bar{q}\bar{x}+q_{k+1}x_{k+1}) \leq \bar{q}f(\bar{x})+q_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$= \bar{q}f\left(\frac{q_1}{\bar{q}}x_1+\dots+\frac{q_k}{\bar{q}}x_k\right)+q_{k+1}f(x_{k+1}) \leq \cancel{\bar{q}}\left[\frac{q_1}{\cancel{\bar{q}}}f(x_1)+\dots+\frac{q_k}{\cancel{\bar{q}}}f(x_k)\right]$$

$$+ q_{k+1}f(x_{k+1}) =$$

$$= q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\dots+q_kf(x_k)+q_{k+1}f(x_{k+1}) \quad \blacksquare$$

NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA

Używamy nierówności Jensena dla funkcji $a \xrightarrow{f} a^2$ biorąc

$q_i = \frac{x_i^2}{\sum x_i^2}$ $\quad a_i = \frac{y_i}{x_i}\sum x_i^2$

$$(x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2 = \left(\frac{x_1^2}{\sum x_i^2}\cdot\frac{y_1}{x_1}\sum x_i^2 + \dots + \frac{x_n^2}{\sum x_i^2}\cdot\frac{y_n}{x_n}\sum x_i^2\right)^2 =$$

$$= (q_1a_1+\dots+q_na_n)^2 \leq q_1a_1^2+\dots+q_na_n^2 = \frac{\cancel{x_1^2}}{\cancel{\sum x_i^2}}\cdot\frac{y_1^2}{\cancel{x_1^2}}\left(\sum x_i^2\right)^{\cancel{2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{\cancel{x_n^2}}{\cancel{\sum x_i^2}}\cdot\frac{y_n^2}{\cancel{x_n^2}}\left(\sum x_i^2\right)^{\cancel{2}} = y_1^2\sum x_i^2 + \dots + y_n^2\sum x_i^2 = \sum x_i^2\sum y_i^2$$

$$|x_1y_1+\dots+x_ny_n| \leq \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$$

$\blacksquare$