ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 04 15.10.2018

WAŻNE NIERÓWNOŚCI

Udowodnić (na przykład indukcyjnie)

(1) NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO: $\forall x \geq -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

(2) NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO (między średnimi)

Dla $a_1, \dots, a_n$ nieujemnych definiujemy $A(a_1,\dots,a_n) = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, $G(a_1,\dots,a_n) = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$

Wykazać, że $A(a_1,\dots,a_n) \geq G(a_1,\dots,a_n)$

Jeśli ponadto $H(a_1,\dots,a_n) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$ dla $a_i \neq 0$

$$G(a_1,\dots,a_n) \geq H(a_1,\dots,a_n)$$

(3) NIERÓWNOŚĆ JENSENA $I \subset \mathbb{R}$ $f: I \to \mathbb{R}$ mówimy, że f jest wypukła na I jeśli

odcinek

$$\forall a,b \in I \ \forall \ 0 \leq q \leq 1$$
$$f(qa+(1-q)b) \leq qf(a)+(1-q)f(b)$$

Wykazać że dla funkcji wypukłej zachodzi

$$x_1,\dots,x_n \in I, \quad q_1+\dots+q_n=1, \quad q_i \geq 0 \implies f(q_1x_1+\dots+q_nx_n) \leq q_1 f(x_1)+\dots+q_n f(x_n)$$

(4) NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)$$