ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 06 22.10.2018

ZADANIE 1: Dokończymy ciągi z poprzednich zajęć

ZADANIE 2: Dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ oznaczamy $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Udowodnić następujące stwierdzenia

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim\limits_{n \to \infty} e_n(x)$

2. Niech $e(x) = \lim\limits_{n \to \infty} e_n(x)$ $\quad \forall x, x' \in \mathbb{R} \quad e(x + x') = e(x)e(x')$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad e(x) > 0$, $e(x) > 1 + x$

4. funkcja $x \longmapsto e(x)$ jest rosnąca

5. $\forall x < 1 \quad e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$

6. Wykazać, że $x \longmapsto e(x)$ ma funkcję odwrotną $\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$$

$$n^2\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right]=n^2\left[\cancel{1}+q\cdot\frac{p}{n}+\binom{q}{2}\frac{p^2}{n^2}+\dots+\frac{p^q}{n^q}+\right.$$

$$\left.-\left(\cancel{1}+p\frac{q}{n}+\binom{p}{2}\frac{q^2}{n^2}+\dots+\frac{q^p}{n^p}\right)\right]=$$

$$=n^2\left[\cancel{\frac{pq}{n}}-\cancel{\frac{pq}{n}}+\frac{1}{n^2}\left(\frac{q(q-1)}{2}p^2-\frac{p(p-1)}{2}q^2\right)+\frac{1}{n^3}\left(\text{skończona sumę mającą granicę}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cancel{q^2p^2}-qp^2-\cancel{p^2q^2}+pq^2\right]+\frac{1}{n}(\dots)=$$

$$=\frac{1}{2}qp(q-p)+\underbrace{\frac{1}{n}(\dots)}_{n\to\infty:\ 0}$$

$(\dots) \to$ const

$$\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3} \qquad a>0$$

Dla $a=1$ $\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}=\sqrt[n]{5+4+3}=\sqrt[n]{12}\xrightarrow{n\to\infty}1$

dla $0<a<1$ $a^{2n}<1$ i $a^n<1$ zatem $1\leqslant\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}\leqslant\sqrt[n]{12}$ i korzystamy z tw. o trzech ciągach

dla $a>1$

$$\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}\leqslant\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^{2n}+3a^{2n}}=\sqrt[n]{12}\cdot a^2\xrightarrow{n\to\infty}a^2$$

$$\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}\geqslant\sqrt[n]{5a^{2n}}=\sqrt[n]{5}\,a^2\longrightarrow a^2$$

korzystamy z tw. o trzech ciągach, zatem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3}=\begin{cases}1 & \text{dla } 0<a\leqslant 1\\ a^2 & \text{dla } a>1\end{cases}$$

$$0\leqslant\frac{n3^n+2n^2-5}{n!+1}\leqslant\frac{n3^n+2n^2}{n!}=\frac{3^n+2n}{(n-1)!}\leqslant\frac{3^n+3^n}{(n-1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{2n+1}$$

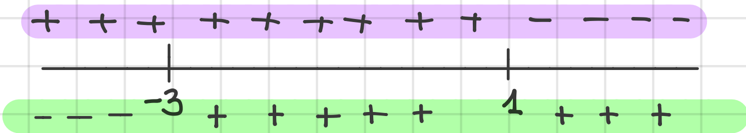
$$x_{n+1} - x_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

$$y_{n+1} - y_{n+2} = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \cancel{\frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$$

ponadto $\forall n \quad x_n < y_n$

(x_n) jest monotoniczny rosnący i ograniczony z góry przez dowolny wyraz (y_n) więc zbieżny

$$\sqrt[n]{(3+x)^n + (1-x)^n} = u_n(x)$$



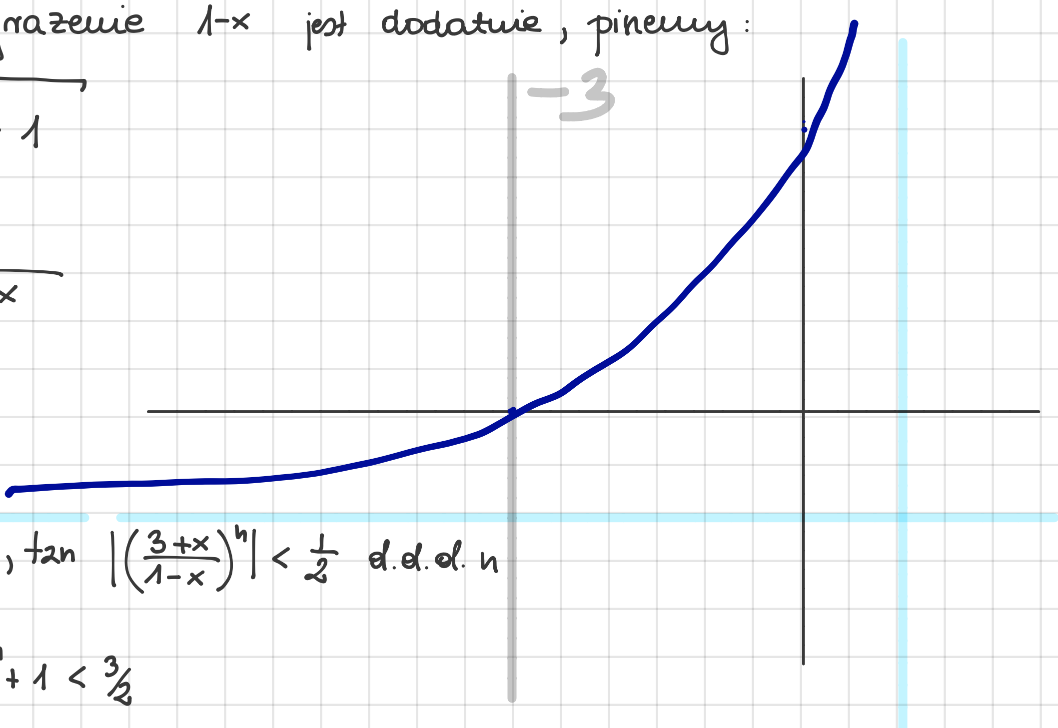
Gdy $x = -3 \qquad u_n(x) = 1-x = 4$

Gdy $x = 1 \qquad u_n(x) = 3+x = 4$

Gdy $x < -3$ jedynie wyrażenie $1-x$ jest dodatnie, piszemy:

$$u_n(x) = (1-x)\sqrt[n]{\left(\frac{3+x}{1-x}\right)^n + 1}$$

$$f(x) = \frac{3+x}{1-x} = -1 + \frac{4}{1-x}$$



Dla $x < -3 \quad \left|\frac{3+x}{1-x}\right| < 1$, tzn $\left|\left(\frac{3+x}{1-x}\right)^n\right| < \frac{1}{2}$ d.d.d. n

mamy więc $\frac{1}{2} < \left(\frac{3+x}{1-x}\right)^n + 1 < \frac{3}{2}$

$$\sqrt[n]{1/2} < \sqrt[n]{\dots} < \sqrt[n]{3/2}$$

$$\downarrow n \to \infty \qquad \downarrow n \to \infty$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

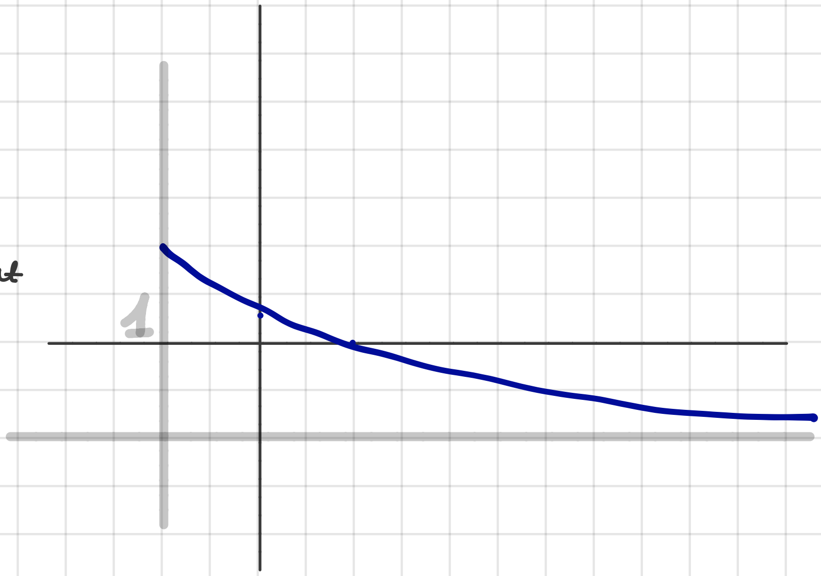
$$\frac{3+x}{1-x} = 1 \qquad 3+x = 1-x \qquad 2x = -2 \qquad x = -1$$

Podobnie jest dla $-3 < x < -1$ nadal można wyłączyć $(x-1)$ a pod pierwiastkiem wyrażenie zachowuje się podobnie

Ostatecznie, dla $x < -1$ $u_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (1-x)$

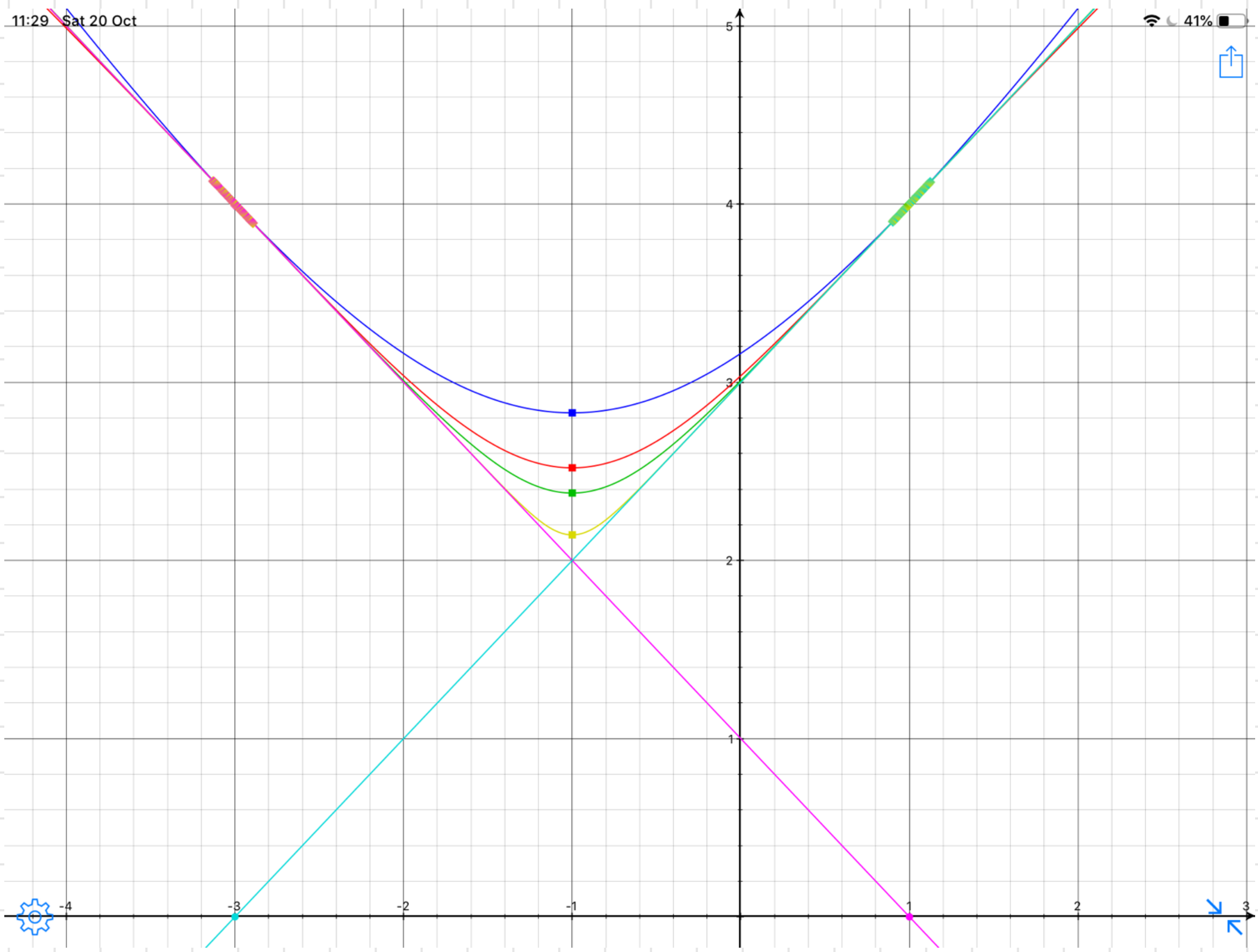
Dla $x > -1$ wyłączamy $(x+3)$

$$u_n(x) = (x+3)\sqrt[n]{1 + \frac{1-x}{x+3}}$$



$\left|\frac{1-x}{x+3}\right| < 1$, więc podobny argument jak poprzednio pokazuje

$$u_n(x) \longrightarrow x+3$$



ZADANIE 2

1

Pokażemy, że $e_n(x)$ jest od pewnego miejsca rosnący

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{\cancel{nx}-\cancel{nx}-x}{(n+1)n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x/n(n+1)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} \geqslant$$

dla dostatecznie dużych n licznik jest mały tak że całość co do modułu mniejsza jest od 1. Korzystamy z nierówności Bernoulliego.

$$\geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\cancel{(n+1)}\frac{x/n\cancel{(n+1)}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = 1+\frac{x}{n} - \cancel{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\frac{x/n}{\cancel{\left(1+x/n\right)}} = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n} = 1$$

$$\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} \geqslant 1 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{e_{n+1}(x) \geqslant e_n(x)}$$

$$e_n(x)e_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

$$e_n(x) \leqslant \frac{1}{e_n(-x)}$$

$e_n(-x)$ rosnący, więc $\frac{1}{e_n(-x)}$ malejący

Ciąg $e_n(x)$ jest więc ograniczony przez dowolny wyraz ciągu $e_n(-x)$

Ciąg $e_n(x)$ jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Granicę $\lim_{n\to\infty} e_n(x)$ oznaczymy $e(x)$, a wartość $e(1)$ oznaczymy e

2

Ustalamy $x,y \in \mathbb{R}$ i bierzemy n wystarczająco duże aby $x/n, y/n, x+y/n > -1$

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \left[\frac{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}}\right]^n = \left[1+\frac{xy/n^2}{1+x+y/n}\right]^n \geqslant$$

$$1+\frac{xy/n}{1+x+y/n}$$

$$\frac{e_n(x+y)}{e_n(x)e_n(y)} = \left[\frac{1+\frac{x+y}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right]^n = \left[\frac{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}-\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right]^n = \left[1-\frac{xy/n^2}{(1+x/n)(1+y/n)}\right]^n$$

$$\geqslant 1-\frac{xy/n}{(1+x/n)(1+y/n)}$$

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \leqslant \frac{(1+x/n)(1+y/n)-\frac{xy}{n}}{(1+x/n)(1+y/n)}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 1}}{1+\frac{xy/n}{1+x+y/n}} \leqslant \frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} \leqslant \underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 1}}{\frac{(1+x/n)(1+y/n)-\frac{xy}{n}}{(1+x/n)(1+y/n)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = 1 = \frac{e(x)e(y)}{e(x+y)}$$

$$\boxed{e(x+y)=e(x)e(y)}$$

3 Ponieważ d.d.d. n $e_n(x) > 0$ to także $e(x) \geqslant 0$, ponadto $e_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n \geqslant 1 + nx/n = 1+x$ zatem także

$$\boxed{e(x) \geqslant 1+x}$$

Z poprzednio udowodnionej własności wiemy, że $e(x)e(-x) = e(x-x) = e(0) = 1$ zatem obie $e(x)$ i $e(-x)$ są tego samego znaku. Jedna z nich jest większa niż $1+|x| > 0$, więc obie są ostro większe od 0.

4

Niech $x > y$

$e(x) = e(x-y+y) = e(y)e(x-y) > e(y)$ $\quad x \mapsto e(x)$ jest ściśle rosnąca.

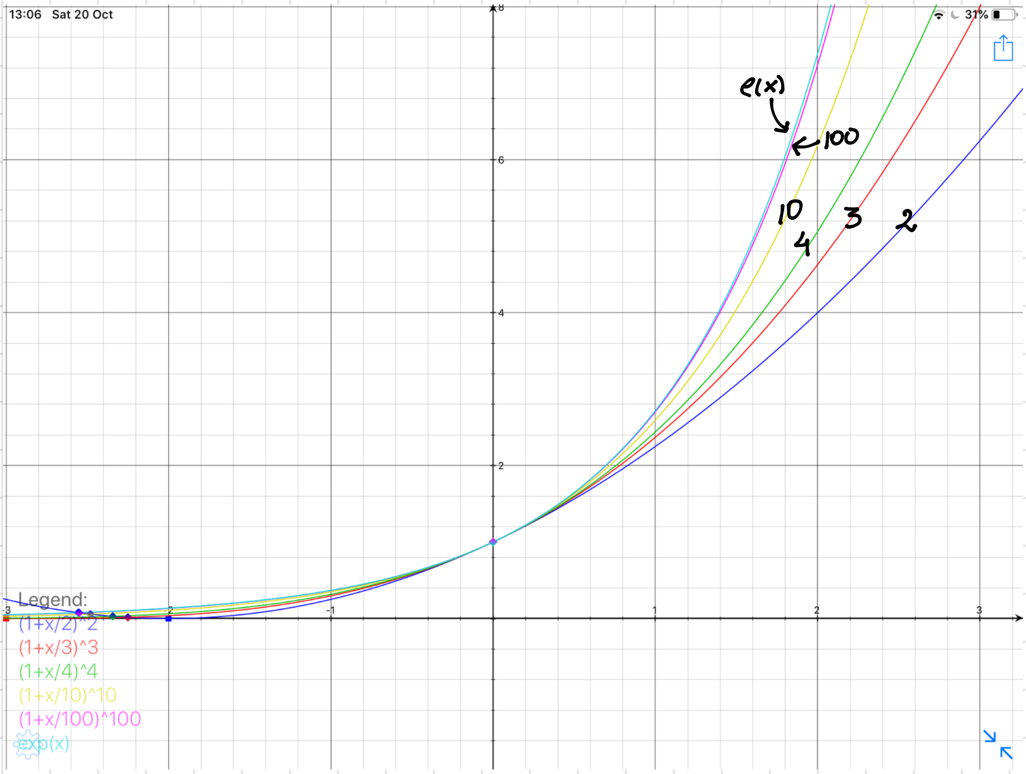
$$e(x-y) > 1 + \underbrace{(x-y)}_{>0} > 1$$

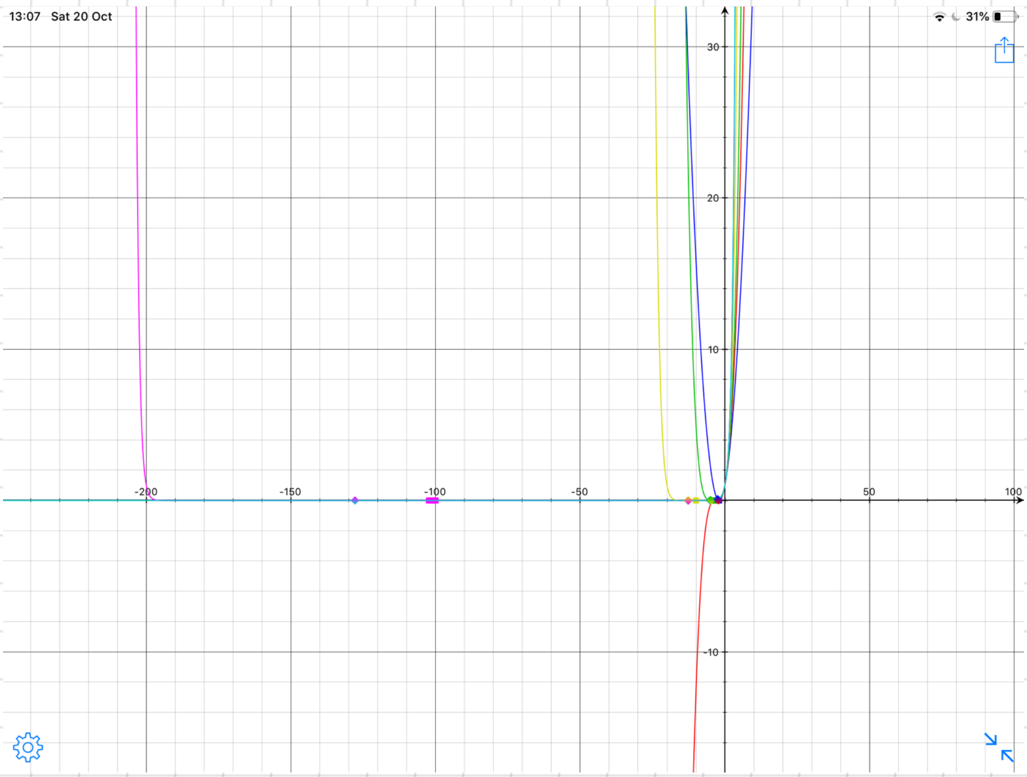
5

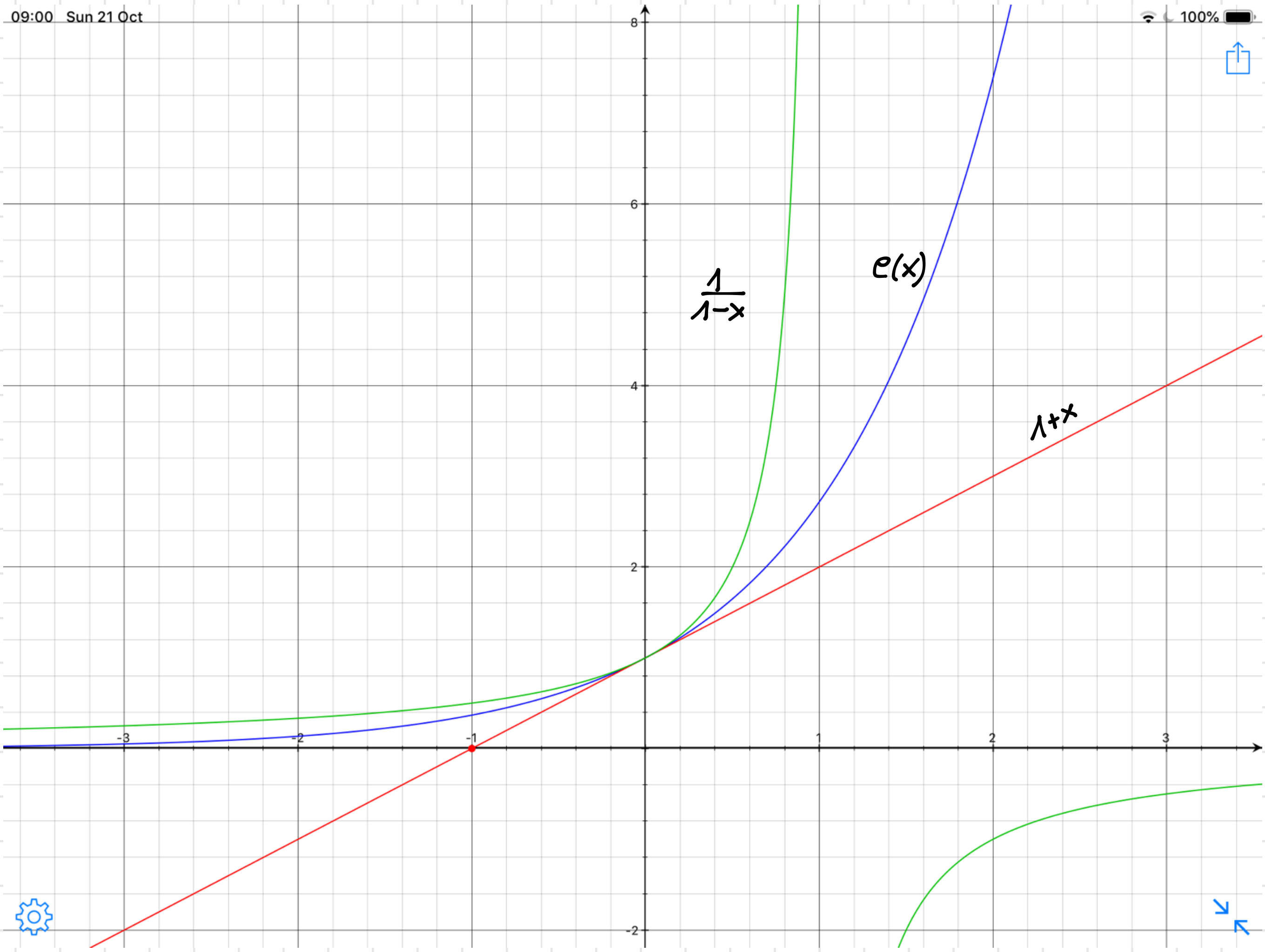
$$e(-x) \geqslant 1+(-x) = 1-x$$

$\frac{1}{e(x)} \geqslant 1-x$ zatem dla $x<1$ $e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$

$$1+x \leqslant e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$$







⑥ Do wykazania, że $x \longmapsto e(x)$ ma funkcję odwrotną, tzn. że jest bijekcją $\mathbb{R}$ i $]0,\infty[$ brakuje nam jeszcze pojęcia ciągłości funkcji i własności funkcji ciągłych. Na razie możemy jedynie wykazać, że $x \longmapsto e(x)$ jest injekcją. Wynika to wprost z faktu, że jest ściśle monotoniczna.

Informacje o funkcji odwrotnej przydadzą nam się jednak w rachunkach

$$]0,1[\ni y \longmapsto \log y \in \mathbb{R}$$

$$1-\frac{1}{y} \leqslant \log y \leqslant y-1$$

$$y = 1+x \implies x = y-1$$

$$y = \frac{1}{1-x} \implies y - xy = 1$$

$$-xy = 1-y$$

$$x = \frac{y-1}{y} = 1-\frac{1}{y}$$

Skoro $e := e(1)$ i $e(x+y) = e(x)e(y)$ to:

$$e(2) = e(1)e(1) = e^2, \quad e(m) = e^m \quad m \in \mathbb{N}$$

$$e(-m)e(m) = e(0) = 1 \Rightarrow e(-m) = \frac{1}{e(m)} = e^{-m}$$

$$e\left(\frac{1}{m}\right)^m = e(1) = e \Rightarrow e\left(\frac{1}{m}\right) = e^{\frac{1}{m}}$$

Mamy więc dla $x \in \mathbb{Q}$ $e(x) = e^x$, Dla pozostałych definiujemy

$$\boxed{e^x := e(x)}$$