ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 07 26.10.2018

ZADANIE 1 Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz istnieje $\lim_{n\to\infty} a_n b_n =: g$, $g \neq \pm\infty$ to

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g$$

ZADANIE 2 Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a$

ZADANIE 3 Wykazać (TW STOLZA) Jeśli y_n jest rosnący, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ wówczas jeśli istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$ to istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ i obie granice są równe

Korzystając z powyższego obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} - \frac{2}{3}n^{3/2}}{\sqrt{n}}$$

ZADANIE 4 Wykazać, że jeśli istnieje granica po prawej stronie to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n).$$

Wykazać ponadto że $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\lim \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = \lim b_n$, $b_n > 0$ jeśli granice po prawej stronie istnieją

Korzystając z powyższego obliczyć $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\dots 2n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

ZADANIE 5 Zbadać zbieżność ciągów danych rekurencyjnie

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \ x_1 > 0 \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$$

ZADANIE 1 Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz istnieje $\lim_{n\to\infty} a_n b_n =: g$, $g \neq \pm\infty$ to

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g$$

$$\log (1+a_n)^{b_n} = b_n \log(1+a_n)$$

$$\boxed{\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x}$$

skoro $a_n \to 0$ to d.d.d.n $|a_n| < 1$ i można użyć wzoru

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leqslant \log(1+a_n) \leqslant a_n \quad / \cdot b_n$$

$$\frac{b_n a_n}{1+a_n} \leqslant b_n \log(1+a_n) \leqslant a_n b_n$$

$$\frac{b_n a_n}{1+a_n} \xrightarrow{n\to\infty} g \qquad a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} g$$

mamy $\lim_{n\to\infty} \log(1+a_n)^{b_n} = g$

$\Downarrow$ + ciągłość exp

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g$$

ZADANIE 2 Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$

$$\sqrt[n]{a} = \underbrace{a^{1/n}}_{x} = e^{\frac{1}{n}\log a}$$

$$x^n = a \quad n\log x = \log a \quad \log x = \frac{\log a}{n} \quad x = e^{\frac{1}{n}\log a}$$

$$1 + x \leqslant e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$$

$$1 + \frac{1}{n}\log a \leqslant e^{\frac{1}{n}\log a} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{n}\log a}$$

$$\frac{1}{n}\log a \leqslant e^{\frac{1}{n}\log a} - 1 \leqslant \frac{\frac{1}{n}\log a}{1-\frac{1}{n}\log a}$$

$$\log a \leqslant n(\sqrt[n]{a} - 1) \leqslant \frac{\log a}{1-\frac{1}{n}\log a} \xrightarrow{n\to\infty} \log a$$

ZADANIE 3 zaczniemy od pomocniczego rachunku: Weźmy $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)$ $v_i > 0$ takie, że

$$\forall i \quad \boxed{\frac{u_i}{v_i} \in [a,b]} \quad \text{tzn} \quad a \leqslant \frac{u_i}{v_i} \leqslant b \quad / \cdot v_i$$

$a v_i \leqslant u_i \leqslant b v_i$ – dodajemy stronami – $\sum a v_i \leqslant \sum u_i \leqslant \sum b v_i$

$$a\sum v_i \leqslant \sum u_i \leqslant b\sum v_i \quad / \sum v_i$$

$$a \leqslant \frac{\sum u_i}{\sum v_i} \leqslant b$$

$$\boxed{\text{tzn} \quad \frac{\sum u_i}{\sum v_i} \in [a,b]}$$

Załóżmy, że $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad a\in\mathbb{R}$

Weźmy $\varepsilon>0$ i N takie, że dla $n\geq N$ (y_n) jest rosnący i ($y_n>0$) $\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

oznacza to, że $a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\frac{\varepsilon}{n}$. Stosując wynik pomocniczych

rachunków do $\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}, \dots, \frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}$ mamy

$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<a+\frac{\varepsilon}{2}$ tzn $\left|\frac{x_n-x_N}{y_n\quad y_N}-a\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)\cdot\frac{y_n-y_N}{y_n}+\frac{x_N}{y_n}+a\frac{y_n-y_N}{y_n}-a=\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)\frac{y_n-y_N}{y_n}+$$
$$+\frac{x_N-ay_N}{y_n}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|=\left|\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)\frac{y_n-y_N}{y_n}+\frac{x_N-ay_N}{y_m}\right|\leq\underbrace{\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|}_{<\varepsilon/2}\underbrace{\left|1-\frac{y_N}{y_n}\right|}_{<1}+\frac{|x_N-ay_N|}{y_n}$$

bierzemy n tak duże, żeby $<\frac{\varepsilon}{2}$

$\dots<\varepsilon$

Oddzielnie należy rozważyć przypadek granicy nieskończonej:

jeśli $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\longrightarrow+\infty$, bierzemy d.d. n żeby $y_{n+1}>y_n>0$ i $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}>1$

$$x_{n+1}-x_n>y_{n+1}-y_n>0$$
$$\vdots$$
$$+\ x_{N+1}-x_N>y_{N+1}-y_N>0$$

$$x_{n+1}-x_N>y_{n+1}-y_N \Rightarrow x_{n+1}>\underset{\downarrow\,+\infty}{y_{n+1}}\underbrace{-y_N+x_N}_{\text{const}} \Rightarrow x_n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$$

Zamiast liczyć $\lim\frac{x_n}{y_n}$ można skorzystać z $\lim\frac{y_n}{x_n}=\lim\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=0$

Zauważmy, że x_n spełnia wszystkie założenia.

Gdy $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\longrightarrow-\infty$ zamieniamy bierzemy $\tilde{x}_n=-x_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}-\frac{2}{3}n^{3/2}}{\sqrt{n}}$$

$x_n=\sqrt{1}+\dots+\sqrt{n}$
$y_n=n\sqrt{n}$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)^{3/2}+n^{3/2}\right)}{(n+1)^3-n^3}=\frac{(n+1)^2+(n+1)^{1/2}n^{3/2}}{3n^2+3n+1}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{3}$$

$x_n=\sqrt{1}+\dots+\sqrt{n}-\frac{2}{3}n^{3/2}$, $y_n=\sqrt{n}$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\sqrt{n+1}-\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}+\frac{2}{3}n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\left(\sqrt{n+1}-\frac{2}{3}n\sqrt{n+1}-\frac{2}{3}\sqrt{n+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}n\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{n+1}-n\cdot\frac{2}{3}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{n(n+1)}-\frac{2}{3}n=$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt{n(n+1)}-n\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{}+\sqrt{}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

ZADANIE 4 Wymienione w treści zadania fakty są konsekwencją tw. Stolza

(1) $\frac{x_n}{n}$: jako y_n bierzemy $y_n=n$

(2) $\sqrt[n]{a_n}$: $\log(\sqrt[n]{a_n})=\frac{1}{n}\log(a_n)$ Na mocy (1) jeśli istnieje $\lim \log a_{n+1}-\log a_n =$ $=\lim\log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ to istnieje $\lim\frac{1}{n}\log(a_n)$ w takim przypadku $\lim\log\sqrt[n]{a_n}=\lim\log\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zatem także $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$

(3) $\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}$: na mocy (2) oczywiste

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdots 2n}=\sqrt[n]{\underbrace{\frac{(n+1)\cdots(2n)}{n^n}}_{a_n}} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\cancel{(n+2)}\cdots(2n+1)(2n+2)\,n^n}{(n+1)^{n+1}\cancel{(n+1)}\cdots\cancel{2n}}$$

$$=\frac{(2n+1)\cdot 2\cancel{(n+1)}\,n^n}{(n+1)\cancel{(n+1)}(n+1)^n}=2\,\frac{2n+1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\longrightarrow\frac{4}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\sqrt[n]{\underbrace{\frac{n^n}{n!}}_{b_n}} \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow e$$