ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 07 26.10.2018

ZADANIE 1 Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz istnieje $\lim_{n\to\infty} a_n b_n =: g$, $g \neq \pm\infty$ to

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^g$$

ZADANIE 2 Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a$

ZADANIE 3 Wykazać (TW STOLZA) Jeśli y_n jest rosnący, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ wówczas jeśli istnieje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$ to istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ i obie granice są równe

Korzystając z powyższego obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \frac{2}{3} n^{3/2}}{\sqrt{n}}$$

ZADANIE 4 Wykazać, że jeśli istnieje granica po prawej stronie to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n).$$

Wykazać ponadto że $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\lim \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = \lim b_n$, $b_n > 0$ jeśli granice po prawej stronie istnieją

Korzystając z powyższego obliczyć $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)\dots 2n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

ZADANIE 5 Zbadać zbieżność ciągów danych rekurencyjnie

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \; x_1 > 0 \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{2}{1 + x_n}$$