ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 07 26.10.2018

Zaczniemy od zadania z poprzednich zajęć

ZADANIE 5 Zbadać zbieżność ciągów danych rekurencyjnie

$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \; x_1 > 0$; $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$

Dalej zajmiemy się granicą górną, dolną i punktami skupienia ciągów:

ZADANIE 1: Obliczyć limsup, liminf i znaleźć zbiór punktów skupienia następujących ciągów:

$$x_n = \frac{n}{1+E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n}) \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

$$z_n = \frac{\log n - (1+\cos(\pi n))\cdot n}{\log 2n}$$

Jeśli zostanie czas, zrobimy kilka zadań powtórzeniowych

ZADANIE 2 Opisać i naszkicować zbiór

$$Y = \bigcup_{t \in [0,+\infty[} A_t \quad \text{gdzie} \quad A_t = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2t(2x-t)\}$$

ZADANIE 3 Zbadać zbieżność

$$\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}, \quad n\log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$$

ZADANIE 5 Zbadać zbieżność ciągów danych rekurencyjnie

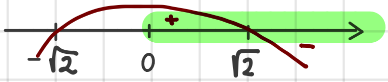
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \quad x_1>0$$

$x_{n+1}=f(x)$ dla $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ Jak wygląda f? $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$

$x\neq 0$, $f(x)>0$ dla $x>0$, $f(x)<0$ dla $x<0$. Ponieważ $x_1>0$ cały ciąg będzie miał dodatnie wartości. Jeśli granica istnieje, to jest punktem stałym f:
$f(g)=g$ $\quad \frac{g^2+2}{2g}=g \quad g^2+2=2g^2 \quad g^2=2 \quad g=\pm\sqrt{2}$ — wybieramy $g=\sqrt{2}$ bo interesuje nas jedynie co dzieje się dla x dodatnich.

Czy ciąg jest rosnący, malejący czy ani taki ani taki?

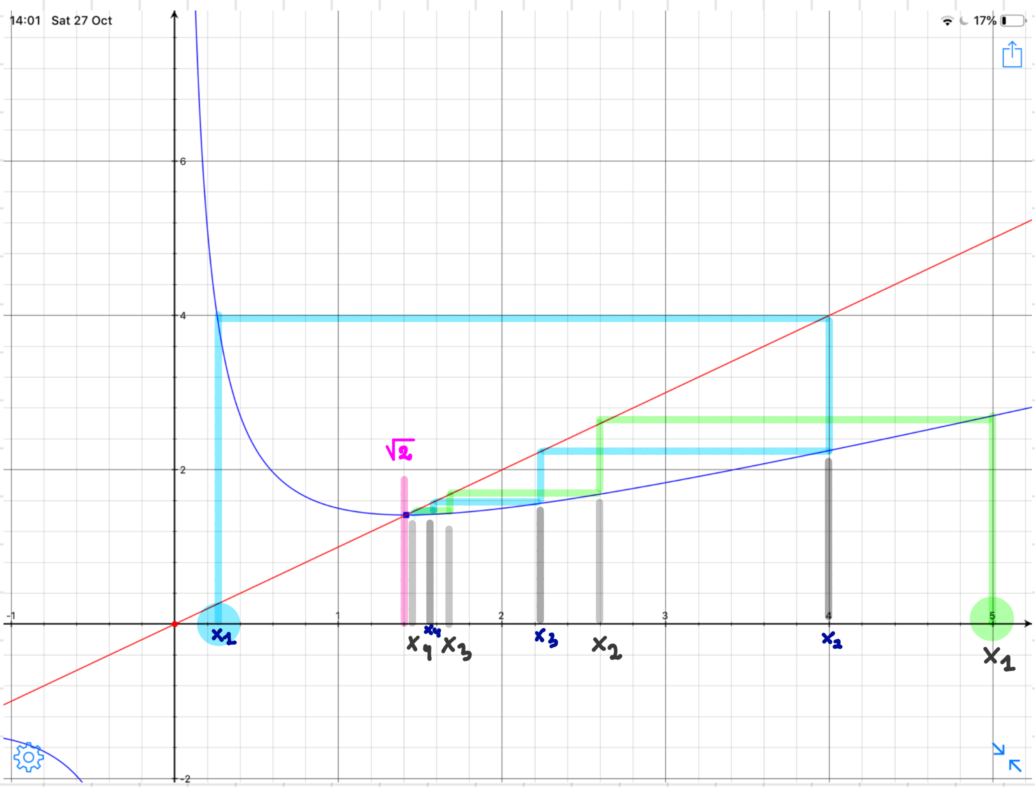
$x_{n+1}-x_n = f(x_n)-x_n$ badamy więc $f(x)-x = \frac{x^2+2}{2x}-x = \frac{x^2+2-2x^2}{2x} = \frac{2-x^2}{2x} =$
$= \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{2x}$ bierzemy jedynie $x>0$



Dla $x\in]0,\sqrt{2}[$ $f(x)>x$ więc ciąg jeśli $x_n\in]0,\sqrt{2}[$ to $x_{n+1}>x_n$, gdy $x\in]\sqrt{2},\infty[$ $f(x)<x$ zatem $x_{n+1}<x_n$. Zauważmy także, że

$$\frac{x^2+2}{2x}\geqslant\sqrt{2} \quad x^2+2\geqslant 2\sqrt{2}x \quad x^2-2\sqrt{2}x+2\geqslant 0 \quad (x-\sqrt{2})^2\geqslant 0$$ zatem dla $x>0$ $f(x)\geqslant\sqrt{2}$

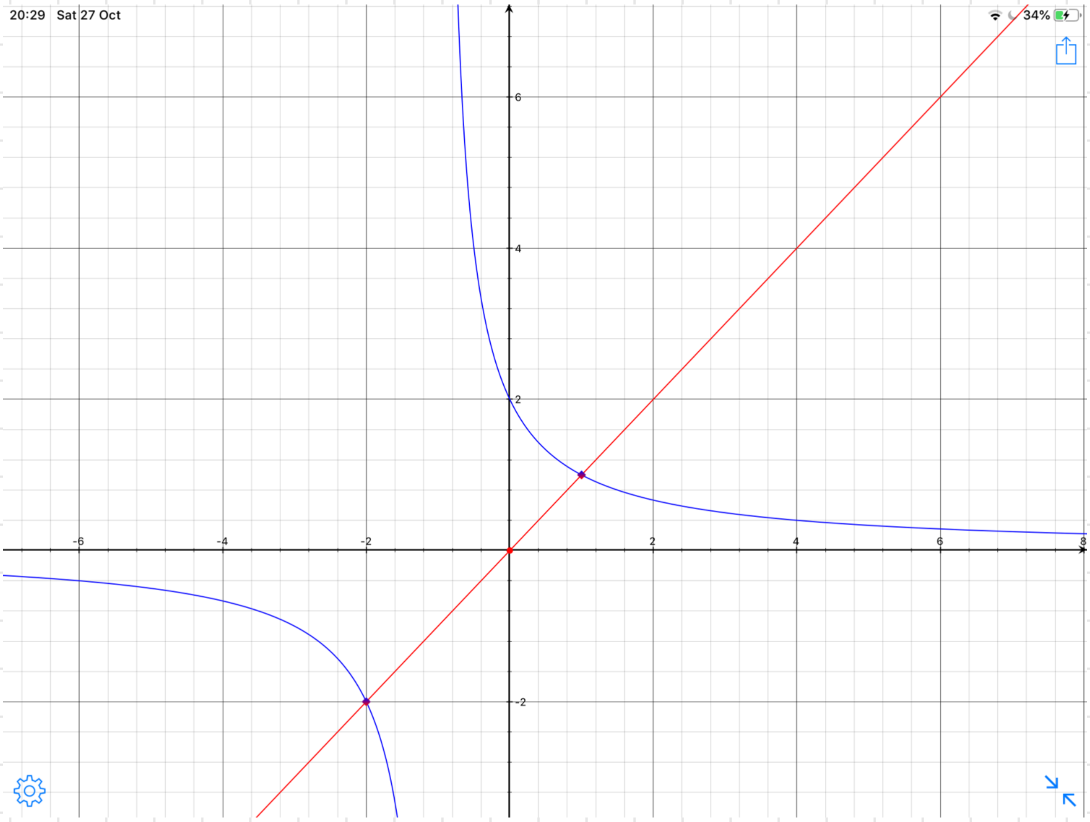
Jeśli więc nawet $x_1\in]0,\sqrt{2}[$ to x_2 i dalsze są więc w przedziale $]\sqrt{2},+\infty[$.
Poza, być może relacją między 1 i 2 wyrazem x_n jest malejący i ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$, zatem zbieżny. Granicą jest $\sqrt{2}$. Gdy $x_1=\sqrt{2}$ ciąg jest stały.



$$x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$$

Ciąg zadany jest homografią, można więc łatwo narysować wykres funkcji

$$g(x) = \frac{2}{1+x}$$



-1 nie należy do dziedziny g, wobec tego jest wiele zabronionych wyrazów początkowych. Są one zadane przez g^{-1}

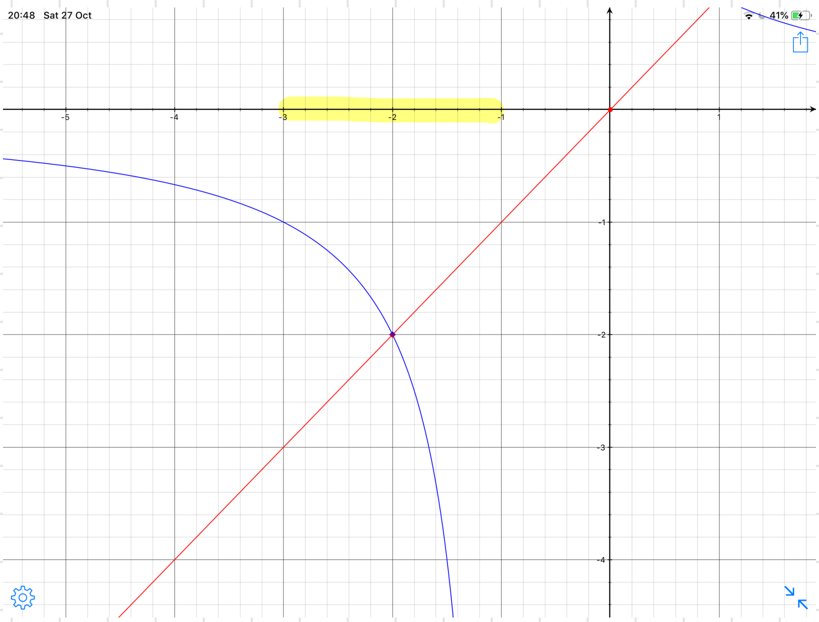
$y = \frac{2}{1+x}$ $\quad y + yx = 2$

$2 - y = yx \quad \frac{2}{y} - 1 = x$

Jest to ciąg (y_n) dany przez $y_{n+1} = \frac{2}{y_n} - 1$, $y_1 = -1$

Wyraz ogólny tego ciągu znajdziemy później, teraz zajmiemy się przypadkiem $x_1 \notin \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$

Zauważmy że (1) dla $x > -1$, $g(x) > 0$ zatem jeśli $x_1 > -1$ ciąg jest od drugiego wyrazu dodatni. (2) g przyjmuje wartość -1 dla $x = -3$ i dla $x < -3$ $f(x) \in]-1, 0[$ zatem $x_3 > 0$. i od trzeciego wyrazu ciąg jest dodatni.



$g(]-3,-2[) \subset]-2,-1[$

$g(]-2,-1[) \subset]-\infty,-2[$

⋮

itd. Wygląda na to, że poza $x_1 = -2$ dla którego ciąg jest stały, zawsze w końcu któryś wyraz będzie dodatni. To oczywiście wymaga dowodu. Zajmiemy się tym później. teraz rozważymy dodatnie x_1.

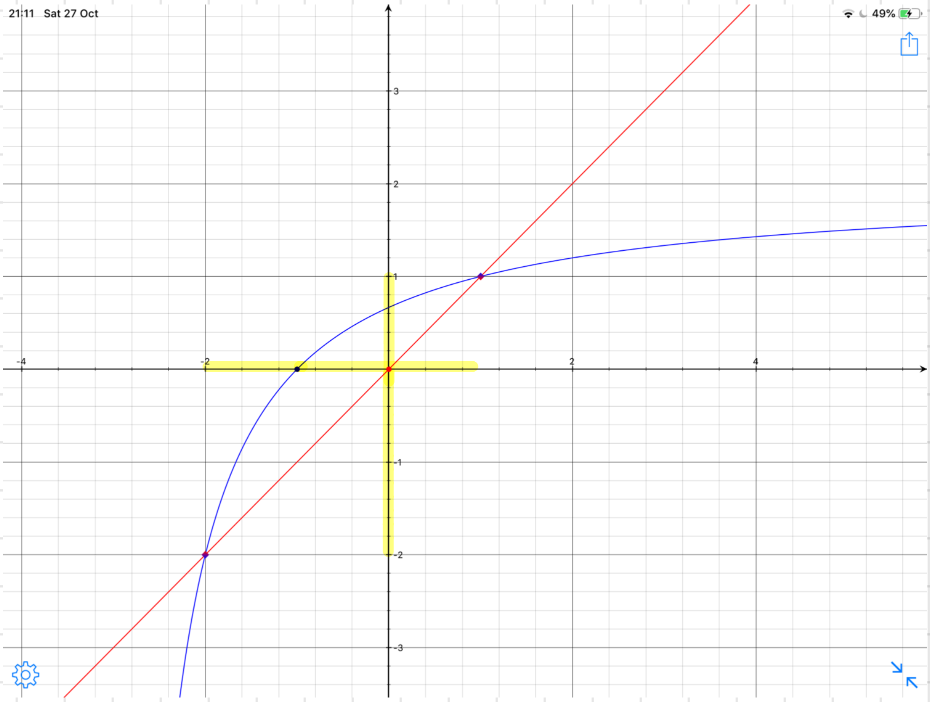
$g(x)=\frac{2}{1+x}$ Punkty stałe $-2, 1$

$g([0,1[) \subset]1,+\infty[$, $g(]1,+\infty[) \subset]0,1[$ co oznacza, że ciąg jest alternujący wokół punktu stałego $x=1$. W tym przypadku rozważamy oddzielnie ciąg wyrazów parzystych i nieparzystych.

$$\underbrace{g\circ g}_{G}(x) = \frac{2}{1+\frac{2}{1+x}} = \frac{2(1+x)}{3+x} = \frac{2x+2}{x+3} = 2-\frac{4}{x+3}$$

$G([0,1[) \subset [2/3,1[$

$G(]1,+\infty[) \subset]1,2[$



zatem oba podciągi są ograniczone
dodatkowo dla $x\in[0,1[$
$G(x)>x \to$ ciąg rosnący
dla $x\in]-1,+\infty[$ $G(x)<x\to$ ciąg malejący. Oba podciągi są monotoniczne i ograniczone więc zbieżne do 1.

Pozostaje przedyskutowanie ciągu o $x_1\in]-2,-1[$. Ciąg ten jest początkowo alternujący wokół -2. Funkcja G opisująca zachowanie nieparzystego podciągu z $x_1\in]-2,-1[$ ma tę własność, że $G(]-2,1[)\subset]-2,1[$ oraz $G(x)>x$ podciąg jest zatem rosnący, ograniczony, a więc zbieżny do 1. Gdy $x_1\in]-2,-1[$ to $x_2<-2$. Parzyste wyrazy są początkowo malejące, ale d.d.d. n $x_{2n}<-3$ i wtedy kolejny wyraz jest już dodatni.

Wzór na n-ty wyraz ciągu

$g(x)=\frac{2}{x+1}=\frac{0\cdot x+2}{1\cdot x+1}$ homografia $x \xmapsto{h} \frac{ax+b}{cx+d}$ odpowiada macierzy $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=H$

Homografie składają się tak jak macierze mnożą $h\circ h \sim H^2$ (można sprawdzić rachunkowo.

$x_{n+1}=g(x_n)=g^2(x_{n-1})=g^n(x_1)$ Należy obliczyć g^n czyli $\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}^n$

$\det\begin{bmatrix}-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)-2=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda+1)$

Tajne rachunki

Macierz $\underset{=A}{\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}}$ spełnia równanie $A^2-A-2\cdot\mathbb{1}=0$ (można sprawdzić rachunkiem)

Jeśli więc podzielimy z resztą λ^n przez $(\lambda-2)(1+\lambda)$ i otrzymamy

$$\lambda^n=q(\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)+ax+b \quad \text{to } A^n=aA+b\cdot\mathbb{1}$$

$$\begin{array}{l} 2^n=2a+b \\ (-1)^n=-a+b \\ \hline 2^n-(-1)^n=3a \end{array} \qquad \begin{array}{l} a=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}(-1)^n \\ b=(-1)^n+a=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot(-1)^n \end{array}$$

$$A^n=\left(\tfrac{1}{3}\cdot 2^n-\tfrac{1}{3}(-1)^n\right)\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}+\left(\tfrac{1}{3}2^n+\tfrac{2}{3}(-1)^n\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{3}\left\{2^n\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}+(-1)^n\begin{bmatrix}2&-2\\-1&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$x_n=\frac{(2^n+2(-1)^n)x_1+2^{n+1}-2(-1)^n}{(2^n-(-1)^n)x_1+2^{n+1}+(-1)^n}$$

zakazane wartości x_1

$$x_1\neq-\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n-(-1)^n}$$

Widać ponadto, że dla d.d.n $x_n>0$.

$$x_n=\frac{n}{1+E(\sqrt{n})}-E(\sqrt{n})$$

To jest bardzo interesujący ciąg! Zapiszmy liczbę n w postaci

$$n=k^2+l \quad \text{gdzie } k=E(\sqrt{n}),\ l \text{ jest jak potrzeba}$$

$$x_n=x_{k,l}=\frac{k^2+l}{1+k}-k=\frac{\cancel{k^2}+l-k-\cancel{k^2}}{1+k}=\frac{l-k}{1+k}.$$

Zauważmy, że dla ustalonego k l zmienia się od 0 do $2k$, zatem

$$-1+\frac{1}{1+k} \quad \frac{-k}{1+k}\leq x_{k,l}\leq\frac{k}{1+k}=1-\frac{1}{k}$$

Zbiór wyrazów ciągu jest więc ograniczony przez -1 z dołu i 1 z góry. Można także wskazać podciągi zbieżne do obu ograniczeń

$$x_{k,0}\xrightarrow[k\to\infty]{}-1 \qquad x_{k,2k}\xrightarrow{k\to\infty}1$$

$$x_{k,0}=x_{n_k} \text{ dla } n_k=k^2 \qquad x_{k,2k}=x_{n_k} \text{ dla } n_k=k^2+2k$$

Innymi słowy $\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$. Liczby te są różne, więc ciąg nie jest zbieżny.

Udowodnimy, że odcinek $[-1,1]$ jest zbiorem punktów skupienia ciągu. Ustalmy liczbę $g \in]-1,1[$. Ponieważ $x_{k,0}$ zbiega do -1 i $x_{k,2k}$ zbiega do 1 to istnieje takie k, że $-1 < x_{k,0} < g < x_{k,2k} < 1$. Weźmy najmniejsze takie k i oznaczmy je K. W przedziale liczb naturalnych $0 \dots 2K$ istnieje l_K takie, że

$$x_{K,l_K} < g < x_{K,l_K+1} \quad \text{lub} \quad g = x_{K,l_K}$$

Ustalamy $n_1 = K^2 + l_K$. Mamy wtedy $|x_{n_1} - g| < \frac{1}{K+1}$
dla $k = K+1$ ustalamy l_{K+1} tak aby

$$x_{K+1, l_{K+1}} < g < x_{K+1, l_{K+1}+1}$$, ustalamy $n_2 = (K+1)^2 + l_{K+1}$ i mamy

$$|x_{n_2} - g| < \frac{1}{K+2}$$

Podobnie konstruujemy dalsze wyrazy n_m dla $k = K+m-1$ i podciąg x_{n_m} o własności

$$|x_{n_m} - g| < \frac{1}{m}$$ z definicji podciąg ten jest zbieżny do g ■

POWTÓRZENIOWE

$$\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}} \quad "x_n"$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!!\; n^n}{(n+1)^{n+1}(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{2n+1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{e}$$

$$n \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) = n \log\left(1 + \frac{+2n}{n^2-n+1}\right)$$

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

$$\frac{\frac{2n^2}{n^2-n+1}}{1+\frac{2n}{n^2-n+1}} \leq n \log\left(1 + \frac{2n}{n^2-n+1}\right) \leq \frac{2n^2}{n^2-n+1} \to 2$$

$\frac{2n}{n^2-n+1} \to 0$

$\to 2$

$$\lim_{n\to\infty} n \log(\dots) = 2$$