ANALIZA 1 studia indywidualne

~~zadania domowe, seria 8~~

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregów:

ZADANIA KOLOROWE ZROBIMY WSPÓLNIE W PIERWSZEJ KOLEJNOŚCI

$\boxed{(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})};}$ $\quad$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n};$

$\boxed{(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n};}$ $\quad$ $\boxed{(4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right);}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p;$ $\quad$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right);$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n};$ $\quad$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n;$

$\boxed{(9)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n;}$ $\quad$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n;$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(10-p\sqrt[n]{5}\right)^n;$ $\quad$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}};$

$\boxed{(13)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}};}$ $\quad$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^p;$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n};$ $\quad$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n};$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}};$ $\quad$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}};$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p};$ $\quad$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n};$

$\boxed{(21)\ \sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n};}$ $\quad$ (22) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)};$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n});$ $\quad$ (24) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\log(1+\frac{1}{n});$

(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n(n+1)}{n^2+1};$ $\quad$ (26) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{n};$

(27) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt[n]{n^3+n};$ $\quad$ $\boxed{(28)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1};}$

(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1};$ $\quad$ (30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n};$

(31) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1};$ $\quad$ (32) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha;$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n};$ $\quad$ (34) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n}\right);$

(35) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};$ $\quad$ (36) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n;$

$$\boxed{(37)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{E(\sqrt{n})}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)};\qquad (38)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{E(n/\sqrt{5})};$$

$$(39)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})};\qquad (40)\ \sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt[n]{n})^n;$$

$$(41)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}};\qquad (42)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$$

Wskazówki (Moje)

(1) I porównawcze z $n^{-\frac{2}{3}}$;
(2) porównać z anharmonicznym;
(3) d'Alembert;
(4) $a_n = f(\frac{1}{n})$ zbadać f koło $x = 0$;
(5) II porównawcze z $\frac{1}{n^p}$;
(6) jak w (4);
(7) I porównawcze z $\frac{1}{n}$;
(8) warunek konieczny;
(9) II porównawcze z e^{-sqrtn};
(10) warunek konieczny;
(11) Cauchy;
(12) I porównawcze z$\frac{1}{2n}$;
(13) Cauchy;
(14) liczyć!;
(15) oszacować sinus;
(16) Cauchy;
(17) warunek konieczny;
(18) to już chyba wiadomo..;
(19) całkowe;
(20) porównać z $\frac{1}{n^\alpha}$;
(21) lemat o zagęszczaniu;
(22) I porównawcze z $\frac{1}{n}$;
(23) jak w (4);
(24) Leibniz;
(25) II porównawcze z$\frac{1}{n}$;
(26) jak w (4);
(27) $\sin\varphi = -\sin(\varphi-\pi)$ i dalej porównać z $\sin\frac{1}{n}$;
(28) Leibniz;
(29) Leibniz;
(30) Dirichlet;
(31) np. całkowe;
(32) badać $|a_n|$ rzecz jest rzędu $\frac{1}{n^2}$;
(33) skorzystać z (32);
(34) liczyć!;
(35) Cauchy;
(36) warunek konieczny;
(37) oszacować $\sum_{n=k^2}^{n=k^2+2k} a_n$;
(38) Leibniz;
(39) Leibniz;
(40) II porównawcze z $\frac{1}{n}$;
(41) obliczyć $\lim n^{1-p}a_n$;
(42) oszacować $a_{2k-1},\ a_{2k}$;

Rozwiązania (GC): Bezwzględnie zbieżne: (1), (3), (4), (9), (13), (16), (18), (21), (23), (26),(32),(34),(35); warunkowo zbieżne: (2), (24), (28), (29), (30), (33), (38), (39); rozbie/zne: (6), (7), (8), (10), (12), (15), (17), (22), (25), (27), (36), (37), (40); (5) zbieżny $\iff$ $p > 1$; (11) zbieżny.(bezwzględnie) $\iff$ $9 < p < 11$; (14) zbieżny (bezwzględnie) $\iff$ $p > 2$; (19) zbieżny $\iff$ $p > 1$; (20) zbieżny $\iff$ $(q < 0)$ lub $(q = 0, p < -1)$; (31) zbieżny $\iff$ $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$; (40) $na_n = (1+x_n)^n$, gdzie $x_n = -(\sqrt[n]{n}-1)^2$, więc $nx_n \to 0$; (41) zbieżny $\iff$ $p < 0$

Zadanie 2. Obliczyć:

TO NA PÓŹNIEJ

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$

(f) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$

(h) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\mathrm{d}x,\ m,n \in \mathbb{N},\ a < b$

(i) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx,\ n \in \mathbb{N}$;

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}$