ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 12 19.11.2018

ZADANIE 1 Niech $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Sprawdzić, że funkcja

$$d : K \times K \longrightarrow \quad d(x,y) = \min\{\|x-y\|,\ 2 - \|x\| - \|y\|\} \qquad \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

jest metryką na K. Narysować kulę o środku w $(0, 3/4)$ i promieniu $1/2$ oraz kulę o środku w $(\frac{1}{2}, 0)$ i promieniu $\frac{1}{4}$. Obliczyć średnicę K. Czy (K, d) jest zupełna?

ZADANIE 2 Odcinkiem metrycznym w przestrzeni (X, d) o końcach a, b nazywamy zbiór

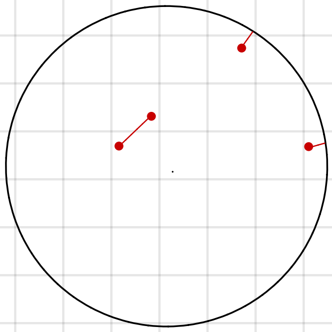
$$[a,b] = \{x \in X : d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\}$$

Naszkicować odcinki o końcach $a = (0,0)$ i $b = (1,2)$ dla metryk d_1, d_2, d_∞ w $\mathbb{R}^2$. Sprawdzić czy odcinek metryczny jest domknięty

ZADANIE 3 Udowodnić, że zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony. Wykazać także, że jeśli (x_n), (y_n) są ciągami Cauchy'ego w (X, d) to ciąg $d_n = d(x_n, y_n)$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}$).

ZADANIE 4 Sprawdzić że funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1 + |x-y|}$ jest metryką na $\mathbb{R}$. Czy metryka ta jest równoważna metryce $\rho(x,y) = |x-y|$. Czy topologia zadawana przez ρ jest równa topologii zadawanej przez d?

ZADANIE 1.



$$d(x,y) = \min\{\|x-y\|, 2-\|x\|-\|y\|\}$$

warunki, które ma spełniać metryka (1) $d(x,y) \geq 0$ (2) $d(x,y)=0$ dla $x=y$ (3) $d(x,y) = d(y,x)$ (4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

(1) oba wyrażenia z których mniejsze stanowi wartość d są nieujemne, zatem d jest nieujemna

(2) $d(x,y)=0$ oznacza $\min\{\|x-y\|, 2-\|x\|-\|y\|\}=0$. Zauważmy, że $\|x\|<1$ i $\|y\|<1$ dla $x,y \in K$, więc $2-\|x\|-\|y\|>0$. $d(x,y)=0$ oznacza więc $\|x-y\|=0$, czyli $x=y$.

(3) Definicja d jest symetryczna ze względu na zamianę x na y.

(4) Jak zwykle najwięcej trudności jest z nierównością trójkąta. Weźmy trzy punkty należące do K: x,y,z. Mogą zajść trzy sytuacje

A: dla obu par $(x,y),(z,y)$ d liczymy według wzoru $\|\cdot - \cdot\|$

B: $d(x,y)=\|x-y\|$ i $d(y,z) = 2-\|y\|-\|z\|$

C: dla obu par odległość liczymy według $2-\|\cdot\|-\|\cdot\|$

A: $d(x,z) \leq \|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$

B: $d(x,z) \leq 2-\|x\|-\|z\| \leq 2-\|y\|+\|y-x\|-\|z\| = d(x,y)+d(y,z)$

$\|a\| = \|a-b+b\| \leq \|a-b\|+\|b\|$

$\|a\|-\|b\| \leq \|a-b\|$

$\big|\|a\|-\|b\|\big| \leq \|a-b\|$

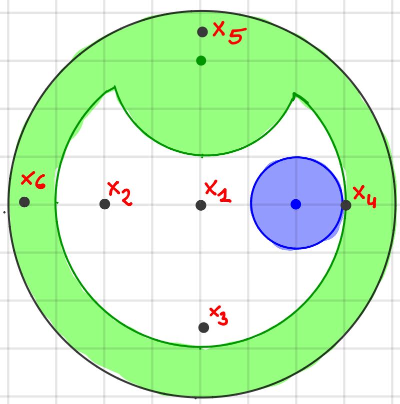
$b = y-x$

$a = y$

$a-b = x$

$\big|\|y\|-\|y-x\|\big| \leq \|x\|$

C: $d(x,z) \leq 2-\|x\|-\|z\| \leq 2-\|x\|-\|z\| + \underbrace{2-2\|y\|}_{\text{dodatnie}} \leq 2-\|x\|-\|y\|+2-\|y\|-\|z\| = d(x,y)+d(y,z)$.



$K((0,\tfrac{3}{4}), \tfrac{1}{2})$

$K((0,\tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{4})$

Przestrzeń nie jest zupełna. Ciąg

$$x_n = \left(\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right), \left(1-\tfrac{1}{n}\right)\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$(0,0);\ (-\tfrac{1}{2},0);\ (0,-\tfrac{2}{3});\ (\tfrac{3}{4},0);\ (0,\tfrac{4}{5})\ \ldots$

Istotnie, dla $m, n > 3$ $\quad d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy N: $\frac{1}{N} < \varepsilon/2$, wtedy dla $m, n > N$

$$d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{N} < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$$ zatem ciąg jest ciągiem Cauchy'ego.

Jednocześnie można pokazać, że prawie wszystkie wyrazy ciągu są oddzielone od dowolnego punktu K. Weźmy $y = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $|r| < 1$

$d(x_n, y) = \min\{1 - r + \frac{1}{n}, \|x_n - y\|\}$ wiadomo, że

$$\|x_n - y\| \geqslant \big|\|x_n\| - \|y\|\big| = \left|1 - \frac{1}{n} - r\right| = 1 - r - \frac{1}{n}$$ dla dostatecznie dużych r

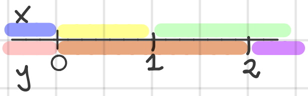
zatem $d(x_n, r) \geqslant 1 - r - \frac{1}{n}$ ustalmy $\delta > 0$ takie, że $\delta < 1 - r$. Dla dostatecznie

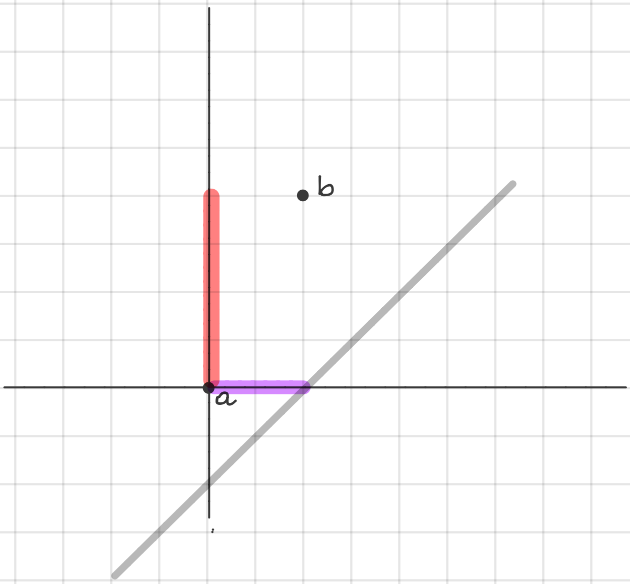
dużego n $\frac{1}{n} < \delta$ i $\|x_n - y\| \geqslant 1 - r - \delta$.

ZADANIE 2 Dla metryki Euklidesowej rozwiązanie jest oczywiste. Dla metryki d_1:

$d_1(a,b) = 1 + 2 = 3$ $\quad \{(x,y): \; d(a,(x,y)) + d((x,y),b) = 3\}$

$$|x| + |y| + |1 - x| + |2 - y| = 3$$





$x \leqslant 0, y \leqslant 0$ $\quad -x - y + \cancel{1} - x + \cancel{2} - y = \cancel{3}$

$-2x - 2y = 0$

$x + y = 0$

$x = y = 0$

$\boxed{0 < x \leqslant 1 \quad y \leqslant 0}$ $\quad \cancel{x} - y + \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{2} - y = \cancel{3}$

$-2y = 0 \quad y = 0$

$\boxed{x > 1 \quad y \leqslant 0}$ $\quad x - y - 1 + x + 2 - y = 3$

$2x - 2y = 2$

$x - y = 1$

$y = x - 1$

$\varnothing$

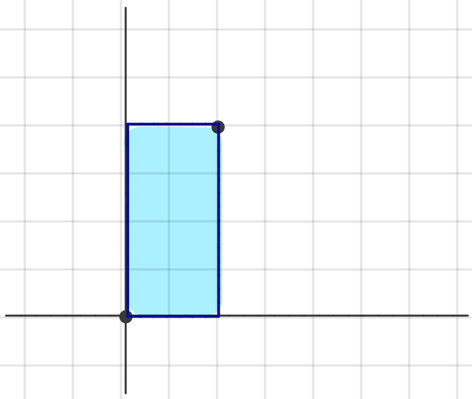
$\boxed{x \leqslant 0, \; 0 < y \leqslant 2}$

$-x + \cancel{1} - x + \cancel{y} + \cancel{2} - \cancel{y} = 3$

$-2x = 0$

$x = 0$

... analizując w ten sposób wszystkie przypadki otrzymujemy:



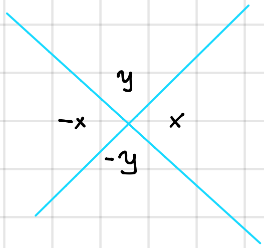
dla d_2 $\quad d(a,(x,y)) = \max\{|x|,|y|\}$ $\quad d((x,y),b) = \max\{|x-1|,|y-2|\}$

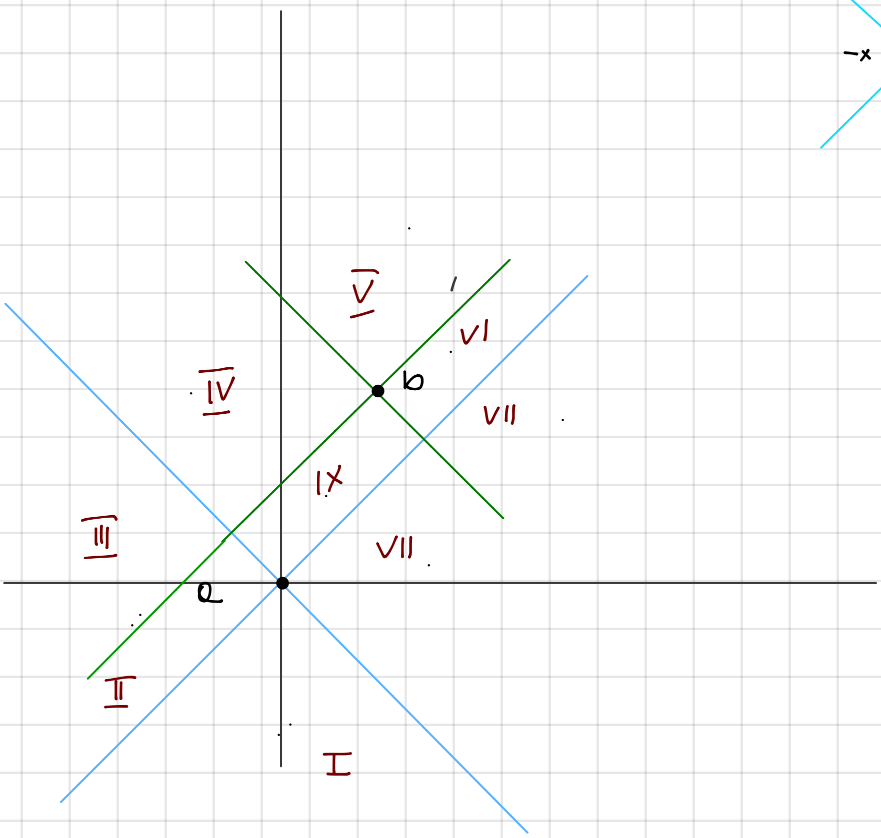
$$\max\{|x|,|y|\} + \max\{|x-1|,|y-2|\} = 2$$

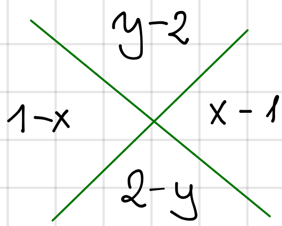
$x = \pm y$ $\qquad x-1 = \pm(y-2)$

$y = x$ $\qquad y-2 = x-1$ $\qquad y = x+1$

$y = -x$ $\qquad y-2 = 1-x$ $\qquad y = -x+3$



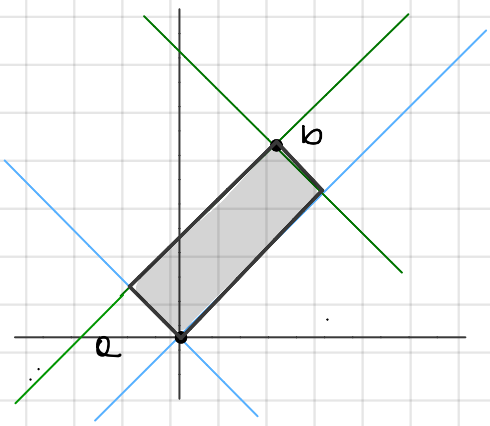




I: $-y + 2 - y = 2 \implies y = 0$

II $\quad -x + 2 - y = 2 \quad x + y = 0$

... analizując wszystkie przypadki otrzymujemy



ZADANIE 4

$$f(a)=\frac{a}{1+a}$$

Zauważmy że dla $a,b\in\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ zachodzi:

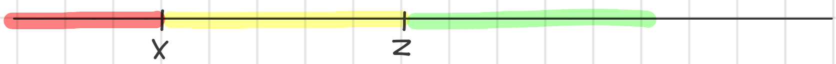
$$f(a+b)=\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}\leqslant\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}=f(a)+f(b)$$

$$|f(a)-f(b)|=\left|\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}\right|=\left|\frac{a+\cancel{ab}-b-\cancel{ab}}{1+a+b+ab}\right|=\frac{|a-b|}{1+a+b}\leqslant\frac{a+b}{1+a+b}=f(a+b)$$

(1) $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$

(2) $|f(a)-f(b)|\leqslant f(a+b)$

ustalmy $x,z\in\mathbb{R}$ $x\neq z$ Bez straty ogólności możemy uznać, że $x<z$
y możemy wstawić w jeden z 3 obszarów



dla dla $y\in[x,z]$ mamy $|x-z|=|x-y|+|y-z|$ i używamy (1)

$$d(x,z)=f(|x-z|)=f(|x-y|+|y-z|)\leqslant f(|x-y|)+f(|y-z|)=d(x,y)+d(y,z)$$

dla $y<x$ mamy

$|y-x|+|x-z|=|y-z|$ i używamy (2)

$$d(y,z)=f(|y-z|)=f(|y-x|+|x-z|)\geqslant|f(|y-x|)-f(|x-z|)|\geqslant f(|x-z|)-f(|y-x|)=$$
$$d(x,z)-d(y,x)$$

$$d(y,z)+d(y,x)\geqslant d(x,z)$$

dla $y>z$ mamy

$|x-z|+|z-y|=|x-y|$ i używamy (2)

$$d(x,y)=f(|x-y|)=f(|x-z|+|z-y|)\geqslant|f(|x-z|)-f(|z-y|)|\geqslant f(|x-z|)-f(|z-y|)=$$
$$=d(x,z)-d(y,z)$$

$$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$$

wykazaliśmy więc nierówność trójkąta. Wartości f dla dodatnich argumentów są dodatnie, ponadto $f(a)=0\iff a=0$ więc warunek dodatniości i niezdegenerowania d jest spełniony.

Wyrażenie na d jest też jawnie symetryczne ze względu na zamianę x i y.

RÓWNOWAŻNOŚĆ METRYK d i ρ: Metryki są równoważne jeśli istnieją liczby $a, b > 0$ takie, że $\forall (x,y)$ $d(x,y) \leqslant a \cdot \rho(x,y)$ i $\rho(x,y) \leqslant b\, d(x,y)$. Zauważmy, że metryka d przyjmuje wartości mniejsze niż 1 podczas gdy ρ może być dowolnie duże. Załóżmy, że liczba b istnieje: bierzemy wtedy $y = x + 2 \cdot b$ i mamy $\rho(x,y) = 2b$ i $d(x,y) = \frac{2b}{1+2b} < 1$ zatem $\rho(x,y) = 2b > b > b \cdot d(x,y)$ co jest sprzeczne z definicją b. Metryki ρ i d nie są równoważne.

RÓWNOŚĆ TOPOLOGII: Niech Θ będzie zbiorem otwartym względem ρ. Oznacza to, że dla każdego $x \in \Theta$ odcinek $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Theta$ dla pewnego ε

$d(x, x+\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Ponieważ f jest monotoniczna to punkty $y \in [x, x+\varepsilon[$ należą do $K_d(x,\delta)$ dla $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Podobnie $d(x, x-\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ i punkty $]x-\varepsilon, x]$ należą do $K_d(x,\delta)$ dla tego samego δ.

$$(1+\varepsilon)\delta = \varepsilon$$
$$\delta = \varepsilon(1-\delta)$$
$$\varepsilon = \delta/_{1-\delta}$$

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= K_\rho(x,\varepsilon) = K_d(x,\delta) \quad \text{dla} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Jeśli więc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \Theta$ to $K_d(x,\delta) \subset \Theta$ i Odwrotnie, jeśli $K_d(x,\delta) \subset \Theta$ to $K_\rho(x,\varepsilon) \subset \Theta$ dla $\varepsilon = \frac{\delta}{1-\delta}$.

Kule otwarte są takie same, więc topologie są takie same

ZADANIE 3 Oszacujmy $|d_n - d_m|$:

$$d_n = d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) \leqslant d(x_n, x_m) + \overbrace{d(x_m, y_m)}^{d_m} + d(y_m, y_n)$$

$$\boxed{d_n - d_m \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)}$$

$$d_m = d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + \overbrace{d(x_n, y_n)}^{d_n} + d(y_n, y_m)$$

$$\boxed{d_m - d_n \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)}$$

$$|d_m - d_n| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

(x_n) (y_n) są ciągami Cauchy'ego. Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieją N_x i N_y takie, że dla $m,n > N_x$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ i dla $m,n > N_y$ $d(y_m, y_n) < \varepsilon/2$. Biorąc $n,m > \max\{N_x, N_y\}$ mamy

$$|d_m - d_n| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$ zatem (d_n) jest liczbowym ciągiem Cauchy'ego ciąg ten jest zbieżny (bo $\mathbb{R}$ jest zupełna).