

ANALIZA \mathbb{R} 2018/2019 ĆWICZENIA 12 19.11.2018

ZADANIE 1 Niech $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Sprawdzić, że funkcja

$$d: K \times K \rightarrow \mathbb{R} \quad d(x, y) = \min\{\|x - y\|, 2 - \|x\| - \|y\|\} \quad \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

jest metryką na K . Narysować kulę o środku w $(0, \frac{3}{4})$ i promieniu $\frac{1}{2}$ oraz kulę o środku w $(\frac{1}{2}, 0)$ i promieniu $\frac{1}{4}$. Obliczyć średnicę K . Czy (K, d) jest zupełna?

ZADANIE 2 Odcinkiem metrycznym w przestrzeni (X, d) o końcach a, b nazywamy zbiór

$$[a, b] = \{x \in X : d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$$

Narysować odcinki o końcach $a = (0, 0)$ i $b = (1, 2)$ dla metryk d_1, d_2, d_∞ w \mathbb{R}^2 . Sprawdzić czy odcinek metryczny jest domknięty

ZADANIE 3 Udowodnić, że zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony. Wykazać także, że jeśli $(x_n), (y_n)$ są ciągami Cauchy'ego w (X, d) to ciąg $d_n = d(x_n, y_n)$ jest zbieżny (w \mathbb{R}).

ZADANIE 4 Sprawdzić że funkcja $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ jest metryką na \mathbb{R} . Czy metryka ta jest równoważna metryce $\rho(x, y) = |x - y|$. Czy topologie zadawane przez ρ jest równoważne topologii zadawanej przez d ?