ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 13 23.11.2018

DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA ZADANIE 2 Z ĆWICZEŃ 12

ZADANIE 1 $B = \left\{ \frac{mn}{m+n} : m,n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$, wykazać, że B jest domknięty

ZADANIE 2 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że jeśli $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$ dla każdego $A \subset X$ to O jest otwarty.

ZADANIE 3 Sprawdzić czy funkcje $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

są ciągłe.

ZADANIE 4 Udowodnić, że $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ jest ciągła w każdym punkcie $\mathbb{R}$.

ZADANIE 5 Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, $f: X \to Y$ odwzorowaniem a $Graph(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ jego wykresem. Wykazać, że jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym to $Graph(f)$ jest zbiorem domkniętym. Podać kontrprzykład na twierdzenie odwrotne. Udowodnić, że jeśli Y jest zwarta to twierdzenie odwrotne zachodzi.

ZADANIE 1 Przyglądamy się zbiorowi B: elementy B z ustalonym m można naturalnie ustawić w ciąg $b_n = \frac{mn}{m+n} = m - \frac{m^2}{m+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ Każda liczba naturalna jest więc punktem skupienia zbioru B. Czy $\mathbb{N} \subset B$? Biorąc $k = l = 2m$ mamy $\frac{kl}{k+l} = \frac{2m \cdot 2m}{2m+2m} = \frac{4m^2}{4m} = m$, zatem $\mathbb{N} \subset B$. Czy są jakieś inne punkty skupienia B?

Weźmy ciąg x_k elementów z B zbieżny.

$$x_k = \frac{m_k n_k}{m_k + n_k} \quad \text{możemy założyć np } m_k \leq n_k$$

Ciąg zbieżny jest ograniczony, więc $\exists c \in \mathbb{R}: \forall_k \; x_k < c$

$$m_k < n_k \quad m_k^2 < m_k n_k \quad m_k^2 + m_k n_k < 2 m_k n_k \quad m_k(m_k + n_k) < 2 m_k n_k \quad m_k < 2\frac{m_k n_k}{m_k + n_k} < 2c$$

Ciąg m_k jest ograniczonym ciągiem liczb naturalnych. Istnieje więc m, które pojawia się nieskończenie wiele razy jako wartość m_k. Wybierzmy podciąg $m_{k_i} = m$

$$x_{k_i} = \frac{m n_{k_i}}{m + n_{k_i}} \quad x_{k_i}(m + n_{k_i}) = m n_{k_i} \quad n_{k_i} x_{k_i} + x_{k_i} m = m n_{k_i} \quad n_{k_i}(x_{k_i} - m) = -x_{k_i} m$$

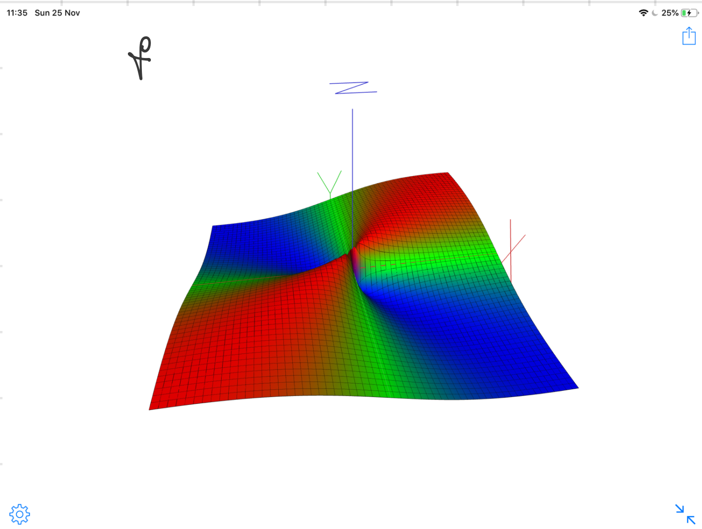
$$n_{k_i} = \frac{m x_{k_i}}{m - x_{k_i}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{mx}{m-x} \quad \text{lub, jeśli } x = m \quad n_{k_i} \longrightarrow \infty$$

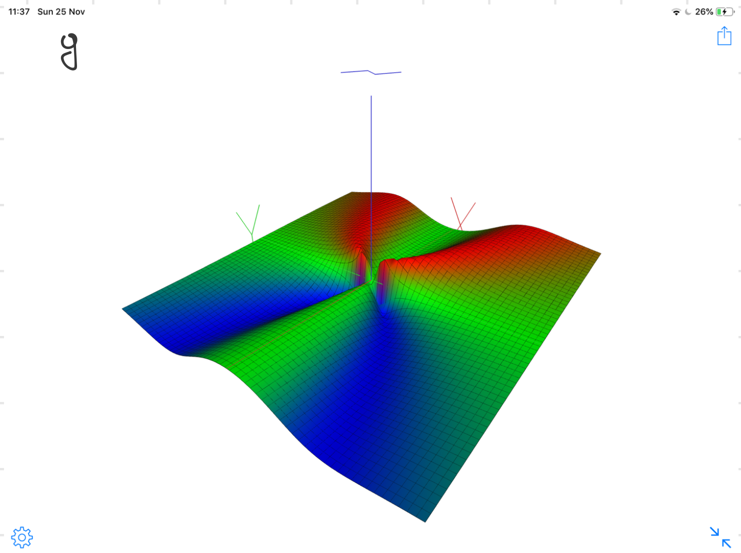
Jeśli n_{k_i} dąży do stałej to ta stała musi być liczbą naturalną n, wtedy $x_{k_i} \longrightarrow \frac{mn}{m+n} \in B$, jeśli $n_{k_i} \longrightarrow \infty$ to $x_{k_i} \longrightarrow m \in B$

Wszystkie punkty skupienia należą do B, zatem B domknięty.

ZADANIE 2 Niech $A = X \setminus \Theta$. Oznaczmy $\partial\Theta = \Theta \setminus \mathrm{Int}\,\Theta$, tzn Θ jest otwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\partial\Theta = \emptyset$. Jeśli $A = X \setminus \Theta$ to $\Theta \cap A = \emptyset$ oraz $\overline{\Theta \cap A} = \emptyset$. Skoro zachodzi warunek $\Theta \cap \overline{A} \subset \overline{\Theta \cap A}$ to musi być $\Theta \cap \overline{A} = \emptyset$. Z drugiej strony $\overline{A} \supset \partial\Theta$ i $\Theta \supset \partial\Theta$ zatem musi być $\partial\Theta = \emptyset$ w takim przypadku Θ otwarty.

ZADANIE 3 f nieciągła w (0,0) gdyż $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$,
g nieciągła w (0,0) gdyż $g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^4}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$





ZADANIE 4 Dowodzimy metodą ε-δ

Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$

$$|\exp(x_0) - \exp(x)| = |\exp(x_0)(1 - \exp(x - x_0))| = \exp(x_0)\,|\exp(x - x_0) - 1|$$

dla $|y| < 1$ mamy $\quad y + 1 \leq \exp(y) \leq \frac{1}{1-y} \quad / -1$

$$y \leq \exp(y) - 1 \leq \frac{y}{1-y}$$

$$|\exp(y) - 1| \leq \max\left\{ |y|, \left|\frac{y}{1-y}\right| \right\} \leq \frac{|y|}{1-|y|}$$

Bierzemy $y = x_0 - x$

$$\exp(x_0)|\exp(x - x_0) - 1| \leq \exp(x_0)\frac{|x - x_0|}{1 - |x - x_0|} < \varepsilon$$

$\exp(x_0)|x - x_0| < \varepsilon(1 - |x - x_0|) \qquad \exp(x_0)|x - x_0| + \varepsilon|x - x_0| \leq \varepsilon \qquad |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \exp(x_0)} = \frac{\varepsilon/\exp(x_0)}{\varepsilon/\exp(x_0) + 1}$

Nierówność $|\exp(x_0) - \exp(x)|$ zachodzi dla x spełniającym warunek $|x - x_0| < \delta$ dla $\delta < \frac{\varepsilon/\exp(x_0)}{\varepsilon/\exp(x_0) + 1}$

$x \longmapsto \exp(x)$ jest więc ciągła na $\mathbb{R}$.