ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 13 23.11.2018

DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA ZADANIE 2 Z ĆWICZEŃ 12

ZADANIE 1 $B = \left\{ \frac{mn}{m+n} : m,n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$, wykazać, że B jest domknięty

ZADANIE 2 Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że jeśli $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$ dla każdego $A \subset X$ to O jest otwarty.

ZADANIE 3 Sprawdzić czy funkcje $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

są ciągłe.

ZADANIE 4 Udowodnić, że $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ jest ciągła w każdym punkcie $\mathbb{R}$.

ZADANIE 5 Niech (X,d), (Y,ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$ odwzorowaniem a $\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ jego wykresem. Wykazać, że jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym to $\mathrm{Graph}(f)$ jest zbiorem domkniętym. Podać kontrprzykład na twierdzenie odwrotne. Udowodnić, że jeśli Y jest zwarta to twierdzenie odwrotne zachodzi.