ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 14 26 i 30. 12. 2018

ZADANIE 1. Niech (X,d), (Y,ϱ) będą przestrzeniami metrycznymi. Zdefiniujmy wykres odwzorowania $f: X \to Y$

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in X \times Y : \ y = f(x)\}.$$

Udowodnić, że jeśli f jest ciągłe to Graph(f) jest domknięty oraz znaleźć kontrprzykład na twierdzenie odwrotne. Wykazać także, że twierdzenie odwrotne zachodzi przy założeniu, że Y jest zwarta

2: **Zadanie 21.** (R) Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych, takich, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi zawieranie $F_{n+1} \subset F_n$. Udowodnić, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

3: **Zadanie 23.** Niech A, B będą podzbiorami przestrzeni metrycznej X. Udowodnić, że jeśli A, B są spójne i $A \cap B \neq \emptyset$ to $A \cup B$ też jest spójny.

4: **Zadanie 24.** (R) W praktycznym dowodzeniu spójności lub niespójności przydają się następujące dwa fakty: **(1)** Jeżeli A jest spójny oraz $A \subset O_1 \cup O_2$ oraz O_1 i O_2 są rozgraniczone (to znaczy $\overline{O_1} \cap O_2 = O_1 \cap \overline{O_2} = \emptyset$) to $A \subset O_1$ lub $A \subset O_2$. **(2)** Jeśli $A \subset O_1 \cup O_2$ oraz $A_1 = O_1 \cap A$, $A_2 = O_2 \cap A$ są niepuste i ponadto O_1, O_2 są rozgraniczone to A jest niespójny.

ZADANIE 5 Niech (X,d) będzie przestrzenią zwartą. Wykazać, że każda izometria $\varphi: X \to X$ jest surjekcją. (A więc także bijekcją, gdyż izometria, niezależnie od zwartości przestrzeni, jest injektywna)

ZADANIE 6 Niech $A_p = \{x : px^2 + 2x + (2p-1) \leq 0\}$ Zbadać, w zależności od wartości $p \in \mathbb{R}$ czy zbiór A_p jest ODZS jako podzbiór $\mathbb{R}$ z normalną topologią

ZADANIE 7 Zbadać ODZS podzbioru $\mathbb{R}^2$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^4 - 4x^2y^2 + 4x^6 \leq 0\}$

ZADANIE 8 Niech X będzie przestrzenią ograniczonych ciągów liczbowych z metryką supremum, tzn

$$d\big((x_n),(y_n)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

Niech Z oznacza zbiór ciągów zbieżnych do 0. Zbadać, czy zbiór Z jest ODZS

9: **Zadanie 28.** Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ z metryką

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Czy metryka $\rho(m,n) = |m-n|$ zadaje tę samą topologię?

10: **Zadanie 29.** W zbiorze $\mathcal{C}([0,1])$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$ wprowadzamy metrykę $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}(|f(t) - g(t)|)$. Zbadać otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru $Z = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \ f(0)f(1) > 0\}$.