ANALIZA $\mathbb{R}$ 2018/2019 ĆWICZENIA 16 3.12.2018

1. **Zadanie 20.** (R) Dowieść, że **(a)** jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A+B := \{a+b \ : \ a \in A,\ b \in B\}$ też jest zwarty; **(b)** jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A+B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A+B$ nie jest domknięty.

2. **Zadanie 32.** Wykazać, że jeśli $f : [a,b[\to [a,b[$ jest ciągłą surjekcją to f ma punkt stały. Wskazówka: własność Darboux dla funkcji ciągłych.

3. **Zadanie 40.** (R) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to f jest stała.

4. **Zadanie 7.** Dla wszystkich, którzy potrzebują praktyki w różniczkowaniu: Obliczyć pochodne poniższych funkcji wszędzie tam, gdzie są one różniczkowalne.

(a) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$; (b) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$; (c) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$;

(d) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$; (e) $f(u) = \sin^4 5x$; (f) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^4+4})$;

(g) $f(x) = \log(\log(\log x))$; (h) $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$; (i) $f(x) = 2^{\tan\frac{1}{x}}$;

(j) $f(x) = e^{\arctan^3 \sqrt{x+4}}$; (k) $f(x) = \log^2(\arcsin^3 \sqrt{x})$; (l) $f(x) = \log(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}})$;

(m) $f(x) = \sinh^3 4x$; (o) $f(x) = \tanh^5(2e^{\sqrt{x}} - 1)$; (p) $f(x) = \sinh(\log(x + \sqrt{x^2+1})$;

(r) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; (s) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$; (t) $f(x) = x^{\sin x}$;

(u) $f(x) = x^{x^2}$; (w) $f(x) = x^{x^x}$; (x) $f(x) = \log_2(x^4+1)$;

(y) $f(x) = \log_x(x^4+1)$; (z) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \sin x \log x$;

ZADANIE 1. (a) W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zwarty i ciągowo zwarty to to samo. Rozważmy więc ciąg (c_n) elementów $A+B$. Zgodnie z definicją zbioru $A+B$ $c_n = a_n + b_n$ dla pewnych $(a_n), (b_n)$. Ciągi (a_n) i (b_n) są być może wyznaczone niejednoznacznie. Dla dowodu nie ma to znaczenia, bierzemy którekolwiek z nich.
Ciąg (a_n) jest ciągiem w zbiorze zwartym, zawiera więc podciąg zbieżny (a_{n_k}) do elementu $a_0 \in A$. Biorąc to samo odwzorowanie $k \longmapsto n_k$ wybieramy (b_{n_k}). Ciąg ten, jako ciąg w zbiorze zwartym, zawiera podciąg zbieżny $(b_{n_{k_l}})$ do elementu $b_0 \in B$.
Podciąg $(c_{n_{k_l}})$ ma postać $c_{n_{k_l}} = a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}} \xrightarrow[l \to \infty]{} a_0 + b_0 \in A+B$ $(c_{n_{k_l}})$ jest więc zbieżnym podciągiem (c_n) i granica tego podciągu należy do $A+B$.
$A+B$ jest zwarty.

(b) Niech x będzie punktem skupienia zbioru $A+B$. Weźmy ciąg (x_n) zbieżny do x. Ciąg (x_n) można zapisać jako $x_n = a_n + b_n$. Z ciągu (a_n) wybieramy zbieżny podciąg (a_{n_k}) i jego granicę oznaczamy a. Mamy więc
$x_{n_k} = a_{n_k} + b_{n_k}$ $b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x - a$ b_{n_k} jest zbieżnym ciągiem w zbiorze domkniętym więc jego granica $b := x - a$ jest elementem B. Wtedy $x = a + b \in A+B$ i $A+B$ jest domknięty.

Weźmy teraz $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ i $B=\{(y,\frac{1}{y})\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$. Oba zbiory są domknięte ale nie są zwarte.

$$A+B=\{(x+y,\tfrac{1}{y})\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y>0\}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\in\mathbb{R},\ b>0\}$$

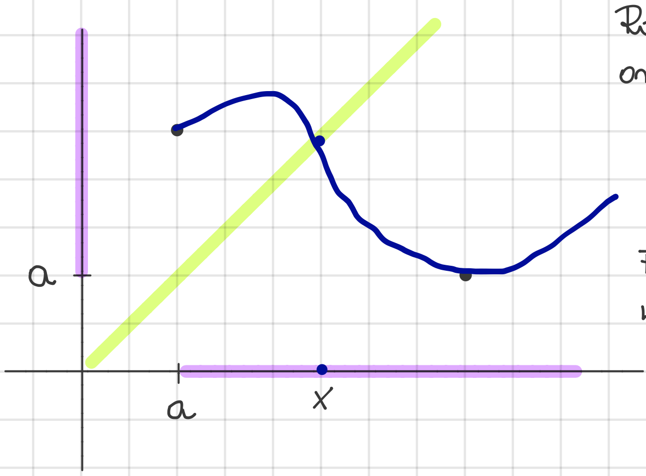
Istotnie, dla danych a,b takich, że $a\in\mathbb{R}$ i $b>0$ bierzemy $y=1/b$ i $x=a-1/b$.

$$a=x+y \quad b=\tfrac{1}{y} \Rightarrow y=\tfrac{1}{b} \quad x=a-\tfrac{1}{b} \quad (a,b)=(a-\tfrac{1}{b},0)+(\tfrac{1}{b},b)$$

Zbiór $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : b>0\}$ nie jest domknięty, jego domknięcie zawiera także oś OX.

ZADANIE 2 Niech $f:[a,b[\longrightarrow[a,b[$ będzie ciągłą surjekcją. Mogą mieć miejsce dwie sytuacje: (I) $f(a)=a$ (II) $f(a)>a$.

W (I) a jest punktem stałym. W (II) Oznaczmy $c=f(a)>a$ i $d\in[a,b[$ takie że $f(d)=a$



Rozważmy g : $g(x)=f(x)-x$ g jest ciągłe oraz

$$g(a)=f(a)-a=c-a>0$$
$$g(d)=f(d)-d=a-d<0.$$

Funkcja ciągła na odcinku przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $g(a)$ i $g(d)$, w szczególności także istnieje $x\in[a,d]$ takie że $g(x)=0$, tzn $f(x)=x$.

ZADANIE 3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dowodzimy od absurdum. Załóżmy, że w obrazie f są przynajmniej dwie różne liczby $y_1<y_2$. Ze względu na własność Darboux także $]y_1,y_2[\subset f(\mathbb{R})$. $f^{-1}(]y_1,y_2[)$ jest otwarty, bo f ciągła a $f(f^{-1}(]y_1,y_2[))$ domknięty z założenia. Jednak $f(f^{-1}(]y_1,y_2[))=]y_1,y_2[$ – sprzeczność.