ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 16 3.12.2018

Zadanie 20. (R) Dowieść, że **(a)** jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A+B := \{a+b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$ też jest zwarty; **(b)** jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A+B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A+B$ nie jest domknięty.

Zadanie 32. Wykazać, że jeśli $f : [a,b[\to [a,b[$ jest ciągłą surjekcją to f ma punkt stały. Wskazówka: własność Darboux dla funkcji ciągłych.

Zadanie 40. (R) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to f jest stała.

Zadanie 7. Dla wszystkich, którzy potrzebują praktyki w różniczkowaniu: Obliczyć pochodne poniższych funkcji wszędzie tam, gdzie są one różniczkowalne.

(a) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$; (b) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$; (c) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$;

(d) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$; (e) $f(u) = \sin^4 5x$; (f) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^4+4})$;

(g) $f(x) = \log(\log(\log x))$; (h) $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$; (i) $f(x) = 2^{\tan\frac{1}{x}}$;

(j) $f(x) = e^{\arctan^3\sqrt{x+4}}$; (k) $f(x) = \log^2(\arcsin^3\sqrt{x})$; (l) $f(x) = \log(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}})$;

(m) $f(x) = \sinh^3 4x$; (o) $f(x) = \tanh^5(2e^{\sqrt{x}} - 1)$; (p) $f(x) = \sinh(\log(x + \sqrt{x^2+1})$;

(r) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; (s) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$; (t) $f(x) = x^{\sin x}$;

(u) $f(x) = x^{x^2}$; (w) $f(x) = x^{x^x}$; (x) $f(x) = \log_2(x^4+1)$;

(y) $f(x) = \log_x(x^4+1)$; (z) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\sin x \log x$;