

ROZGRZEWKA: OBLICZYĆ CAŁKI NIEOZNACZONE, TZN ZNALEŻĆ FUNKCJE PIERWOTNE

$$\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$$

$$\int \sin^3 x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

$$\int x^{-3/2} \log(1+\sqrt{x}) dx$$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH.

$$\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx, \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} dx, \int \frac{dx}{x^4 - 1}, \int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} dx,$$

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx$$

Rozwiązanie:

$$\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx \quad \text{Obszerujemy że funkcje postaci } W(x)e^x \text{ są zamknięte ze}$$

względem na różniczkowanie, oraz zachowany jest stopień wielomianu

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \quad F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a+b)x + (b+c))e^x$$

$$a = 1 \quad 2a + b = -2 \quad b + c = 3 \quad \longrightarrow \quad c = 3 - b = 3 + 4 = 7$$

$$\hookrightarrow b = -2 - 2a = -4$$

$$F(x) = (x^2 - 4x + 7)e^x + C$$

$$\int \sin^3 x dx = \begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{cases} = \int \sin^2 x \underbrace{\sin x dx}_{-dt} = \int (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C$$

(1-t²)