ANALIZA IR 2018/2019 ĆWICZENIA 22 i 23 7 i 12.01.2019

ZADANIE 1 CAŁKI Z FUNKCJI WYMIERNYCH OD FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

(a) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ podstawienie $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

(b) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$ podstawienie $t=\cos x$ lub $t=\sin x$

(c) $\int \frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$ podstawienie $t=\operatorname{tg}x$

ZADANIE 2 PODSTAWIENIA HIPERBOLICZNE I TRYGONOMETRYCZNE DLA CAŁEK Z PIERWIASTKAMI

(a) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$ $x=b\operatorname{tg}t$ rozważyć $0<a<b$ i $0<b<c$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ $x+1=\operatorname{tg}t$ lub $x+1=\sinh t$

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}$ $x=\sin t$

Zadanie 7. Podstawienie Eulera służą do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci

$$f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}),$$

gdzie R jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy $y:=\sqrt{ax^2+bx+c}$ sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x\mapsto(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\in\mathbb{R}^2$$

dla $y>0$ parametrem t w taki sposób, aby $x(t)$ i $y(t)$ były wymierne.

(1) Pierwsze podstawienie Eulera działa gdy $a>0$, podstawiamy $y=\sqrt{a}x+t$. Wyznaczamy $x(t)$, $y(t)$ i $dx=x'(t)dt$;
(2) Drugie podstawienie Eulera działa gdy $c>0$, podstawiamy $y=tx+\sqrt{c}$;
(3) Trzecie podstawienie Eulera działa gdy łatwo jest wybrać punkt (x_0,y_0) na krzywej, $y_0=\sqrt{ax_0^2+bx_0+c}$, podstawiamy $y-y_0=t(x-x_0)$. Prowadząc rachunki warto zapisać y^2 w potęgach $x-x_0$ zamiast x.

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\quad\text{oraz jej wersji oznaczonej}\quad\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$