ANALIZA I R ĆWICZENIA 24 i 25 14 i 18 STYCZNIA 2019

ZADANIE 1.

ZBADAĆ ZBIEŻNOŚĆ PUNKTOWĄ i JEDNOSTAJNĄ (EWENTUALNIE NIEMAL JEDNOSTAJNĄ) PODANYCH CIĄGÓW FUNKCYJNYCH:

$$f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}; \quad g_n(x) = \frac{nx}{n+x^2}; \quad h_n(x) = x\,\frac{(n+1)x+n}{nx+1}, \quad x \in \,]0,\infty[$$

ZADANIE 2.

WYKAZAĆ, ŻE JEŚLI $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ JEST CIĄGŁA, TO

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) = \log f(x) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,dx\right)^n = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)\,dx\right)$$

PRZY CZYM PIERWSZA ZBIEŻNOŚĆ JEST JEDNOSTAJNA.

ZADANIE 3.

SPRAWDZIĆ POPRAWNOŚĆ RACHUNKÓW

(1) $$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 2$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

(3) $$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^x}{(2+x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

ZADANIE 4

WYKAZAĆ, ŻE f, g SĄ KLASY C^1 NA $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{nx^2+3}}{n^2}$$

ZADANIE 5

ZNALEŹĆ OBSZAR ZBIEŻNOŚCI i WYZNACZYĆ SUMĘ SZEREGÓW

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n n^2}{n^2-1}x^{3n-5}$$

ZADANIE 6

OBLICZYĆ: $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(16n^2-4n+1)a^n$$