ANALIZA I R ĆWICZENIA 27 25.01.2018

EGZAMIN PRZYKŁADOWY

ZADANIE 1

NIECH (X,ϱ) BĘDZIE PRZESTRZENIĄ METRYCZNĄ, $A \subset X$ NIEPUSTYM PODZBIOREM.

$$d : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad d(x) = \inf\{\varrho(x,y) : y \in A\}$$

WYKAZAĆ, ŻE D JEST CIĄGŁA.

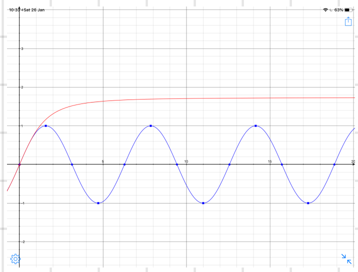
ZADANIE 2

Problem z tym zadaniem polegał na błędzie w treści. Funkcja po prawej stronie powinna być

$$\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}$$

UDOWODNIĆ, ŻE DLA $x>0$ ZACHODZI

$$\sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^3}{3}}}$$



ZADANIE 3

OBLICZYĆ

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}, \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-x} \cos x \, dx$$

ZADANIE 4

ZBADAĆ ZBIEŻNOŚĆ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} \quad p \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ZADANIE 5

ZNALEŹĆ ASYMPTOTĘ W NIESKOŃCZONOŚCI DLA

$$]0,+\infty[\ni x \longmapsto \frac{x^{(1+x)}}{(1+x)^x} \in \mathbb{R}$$

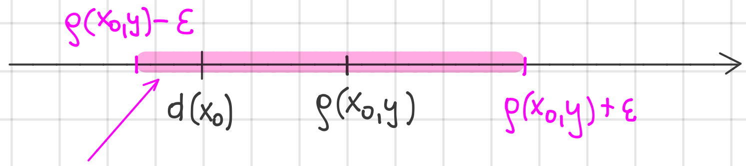
ZADANIE 1

$$d(x) = \inf \{ \varrho(x,y) : y \in A \}$$

Weźmy x i x_0 takie, że $\varrho(x,x_0) < \varepsilon$. Wtedy dla dowolnego y $|\varrho(x,y) - \varrho(x_0,y)| < \varepsilon$
Istotnie:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho(x,y) \leq \varrho(x,x_0) + \varrho(x_0,y) < \varepsilon + \varrho(x_0,y) \Rightarrow \varrho(x,y) - \varrho(x_0,y) < \varepsilon \\ \varrho(x_0,y) \leq \varrho(x_0,x) + \varrho(x,y) < \varepsilon + \varrho(x,y) \Rightarrow \varrho(x_0,y) - \varrho(x,y) < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |\varrho(x,y) - \varrho(x_0,y)| < \varepsilon$$

* Niech teraz $y \in A$. Wtedy $d(x_0) \leq \varrho(x_0,y)$



Liczba $\varrho(x,y)$ należy do odcinka $]\varrho(x_0,y) - \varepsilon, \varrho(x_0,y) + \varepsilon[$ zatem

$$\varrho(x,y) \in]d(x_0) - \varepsilon, \varrho(x_0,y) + \varepsilon[$$

$$\underbrace{d(x_0) - \varepsilon < \varrho(x,y)} < \varrho(x_0,y) + \varepsilon \; [$$

ta nierówność zachodzi dla wszystkich $y \in A$, zatem $\inf\{\varrho(x,y) : y \in A\} = d(x)$ spełnia

$$d(x_0) - \varepsilon \leq d(x) \quad \text{tzn} \quad d(x_0) - d(x) < \varepsilon \quad **$$

Całe rozważanie od (*) do (**) można powtórzyć z zamienionymi rolami x i x_0 zatem otrzymujemy także

$$d(x) - d(x_0) < \varepsilon \; (***) \qquad \text{zatem z } (**) \text{ i } (***) \text{ wynika } |d(x_0) - d(x)| < \varepsilon$$

Wykazaliśmy że z $\varrho(x,x_0) < \varepsilon$ wynika $|d(x_0) - d(x)| < \varepsilon$. W definicji ciągłości wystarczy więc wziąć $\delta = \varepsilon$.

ZADANIE 2

$$\sin x < \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}}$$

Rozważamy $f(x) = x / \sqrt{1 + x^2/3}$ $\quad f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2/3}} = \sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{} - \frac{x}{2\sqrt{}} \cdot \frac{2}{3}x}{1 + x^2/3} = \frac{1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3}}{(1 + x^2/3)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + x^2/3)^{3/2}} > 0 \quad \text{zatem } f \text{ jest rosnąca}$$

$$\frac{x}{\sqrt{}} = 1 \qquad x = \sqrt{} \qquad x^2 = 1 + \frac{x^2}{3} \qquad \frac{2}{3}x^2 = 1 \qquad x^2 = \frac{3}{2} \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

zatem dla $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ nierówność jest oczywista

Dalsze rachunki prowadzimy dla $x \in]0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ Dla takich x można zastosować arcsin do obu stron nierówności. dowodzimy więc

$$x < \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2/3}} \qquad g(x) = x - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2/3}} < 0$$

dowodzimy dla $x \in]0, \frac{\sqrt{3}}{2}[$

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+}(x - \arcsin f(x)) = 0 \qquad g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2/3}}}\, f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{1+x^2/3}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} \cdot \frac{1}{(1+x^2/3)^{3/2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1-\frac{2}{3}x^2)^{1/2}(1+\frac{x^2}{3})} = \frac{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}\,(1+\frac{x^2}{3}) - 1}{\underbrace{(1-\frac{2}{3}x^2)^{1/2}(1+\frac{x^2}{3})}_{>0}}$$

Zajmujemy się licznikiem. Zależy, żeby nam wykazać że $g'(x) < 0$, bo wtedy g byłaby malejąca i nierówność spełniona.

$$\sqrt{}\,(1+\frac{x^2}{3}) < 1 \qquad (1-\frac{2}{3}x^2)(1+\frac{x^2}{3})^2 < 1 \qquad (1-\frac{2}{3}x^2)(1+\frac{2}{3}x^2+\frac{x^4}{9}) < 1$$

$$\cancel{1} + \cancel{\frac{2}{3}x^2} + \frac{x^4}{9} - \cancel{\frac{2}{3}x^2} - \frac{4}{9}x^4 - \frac{2}{27}x^6 - \cancel{1} < 0$$

$$-\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{27}x^6 < 0$$

nierówność prawdziwa dla dowolnego $x \neq 0$.

ZADANIE 3

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_1^0 \frac{-2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$t = \sqrt{1-x}$ $\qquad t \in [0,1]$

$$dt = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x}} \qquad -2dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$t^2 = 1-x \quad /+1$

$t^2+1 = 2-x$

$$f(x) = x^2e^{-x}\cos x\, dx = F'(x)$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\cos x\, dx$$

$$F(x) = (ax^2+bx+c)\cos x\, e^{-x} + (Ax^2+Bx+C)\sin x\, e^{-x}$$

$$F'(x) = (2ax+b)\cos x + (ax^2+bx+c)(-\sin x) - (ax^2+bx+c)\cos x + (2Ax+B)\sin x +$$

$$(Ax^2+Bx+C)\cos x - (Ax^2+Bx+C)\sin x =$$

$$= \sin x\left(-ax^2 - bx - c + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C\right)e^{-x} + \cos x\left(2ax + b - ax^2 - bx - c + Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x} =$$

$$= \sin x\left\{(-a-A)x^2 + (-b+2A-B)x - c - C + B\right\}e^{-x} +$$

$$+ \cos x\left\{(-a+A)x^2 + (2a+B-b)x + b - c + C\right\}e^{-x}$$

$$\left.\begin{aligned} a + A &= 0 \\ A - a &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad a = -\frac{1}{2} \qquad \left.\begin{aligned} 1 - b - B &= 0 \\ -1 + B - b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -2b &= 0 \\ b &= 0 \\ B &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -c - C + B &= 0 \\ -c + b + C &= 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} -2c &= -1 \\ c &= 1/2 \\ C &= 1/2 \end{aligned} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} -c - C &= -1 \\ -c + C &= 0 \end{aligned}$$

$$F(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)\cos x\, e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\sin x\, e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = 0 - 1/2 = -1/2$$

ZADANIE 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{n\pi}{2^{n+1}} \qquad \sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\pi}}{2\sqrt[n]{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Na podstawie kryterium Cauchy'ego $\sum b_n$ zbieżny

$$a_n = n \operatorname{tg} \pi/2^{n+1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n \operatorname{tg} \pi/2^{n+1}}{n\pi/2^{n+1}} = \frac{\sin \pi/2^{n+1}}{\pi/2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cos(\pi/2^{n+1})} \longrightarrow 1$$

na mocy II kryt porównawczego $\sum a_n$ zbieżny

$$\sum_{n=1} \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$$

$$\sqrt{\frac{n}{n^3+1}} \geq \sqrt{\frac{n}{2n^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n}$$

Na mocy pierwszego kryterium porównawczego szereg rozbieżny

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} \qquad p \in \mathbb{R}$$

$$\cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k} \log^p(2^k)} = \frac{1}{k^p \log^p 2}$$

Na mocy lematu o zagęszczaniu szereg zbieżny dla $p>1$, rozbieżny dla $p \leq 1$.

ZADANIE 5

$$]0,+\infty[\ni x \longmapsto \frac{x^{(1+x)}}{(1+x)^x} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\,\frac{x^{(1+x)}}{(1+x)^x} = \frac{x^x}{(1+x)^x} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \exp\left(x\log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{e} = a$$

$$f(x) - ax = f(x) - \frac{x}{e} = \frac{x^{(1+x)} - \frac{x}{e}(1+x)^x}{(1+x)^x} = x\,\frac{x^x - \frac{(1+x)^x}{e}}{(1+x)^x} =$$

$$x\cdot\frac{\exp(x\log x) - \frac{1}{e}\exp(x\log(1+x))}{\exp(x\log(x+1))} = x\,\frac{\exp(\cancel{x\log x})\left[1-\frac{1}{e}\exp(x\log(1+x) - x\log x)\right]}{\exp(\cancel{x\log x})\exp(x\log(x+1) - x\log x)} =$$

$$= x\,\frac{1-\frac{1}{e}\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}\ \boxed{\frac{x}{e}\left(e-\exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right)}$$

$$t=\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{et}\left(e-\exp\left(\frac{1}{t}\log(1+t)\right)\right) = \frac{1}{et}\left(e-\exp\left(\frac{1}{t}\left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\dots\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{et}\left(e-\exp\left(1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^3\dots\right)\right) = \frac{1}{t}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^3+\dots\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^3\dots\right)-1\right)}{-\frac{1}{2}t}$$

$$\xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{2} \qquad f(x)-ax \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2e} \qquad \text{asymptota} \quad y = \frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$