I Kolokwium z Analizy Ind.
5. listopada 2018

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz osoby prowadzącej ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1.
Dla $t \in \mathbb{R}$ niech $P_t \in \mathbb{R}^2$ będzie domkniętą półpłaszczyzną ograniczoną od góry prostą przechodzącą przez punkty $a_t := (t+1, t+1)$ i $b_t := (t-1, 1-t)$. Opisać (tzn. wyprowadzić zestaw nierówności) oraz narysować zbiory: a) $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} P_t$, b) $\bigcap_{t\in[-1,1]} P_t$.

Zadanie 2.
Udowodnić wzór:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \,, n \in \mathbb{N}_+$$

Zadanie 3.
Obliczyć granice (lub wykazać rozbieżność) ciągów:
a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$
b) $b_n = \frac{2}{\sqrt[n]{9}-1} - \frac{3}{\sqrt[n]{27}-1}$;
c) $c_n = \frac{1}{n}\sqrt[6]{n^5 + (n+1)^5 + \cdots + (n+n)^5}$;
d) $d_n = \frac{n^{2n}}{2^n(2n)!}$

Zadanie 4.
Zbadać zbieżność ciągu rekurencyjnego zadanego przez: $x_0 = 2\,,\ x_{n+1} := \frac{5x_n-6}{2x_n-3}$.

ZADANIE 3

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{x_n}{y_n} \qquad x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}} \qquad y_n=\sqrt{n}$$

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{n+3}}}+\dots+\cancel{\frac{1}{\sqrt{2n}}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}-\dots-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2n}}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)\sqrt{2n+1}}\left[\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{2n^2+4n+2}-\sqrt{4n^2+6n+2}\right]\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right] = \frac{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]\left[\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+\right.}{\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{2+1/n}}$$

$$\frac{\left.-\sqrt{4+6/n+2/n^2}\right]}{\dots} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\cdot\left[\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\right]}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\left(2\sqrt{2}-2\right)}{2} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\sqrt[n]{9}-1} - \frac{3}{\sqrt[n]{27}-1} = \frac{2}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{3}+1)} - \frac{3}{(\sqrt[n]{3}-1)(\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}-1}\cdot\frac{2\sqrt[n]{9}+2\sqrt[n]{3}+2-3\sqrt[n]{3}-3}{(\sqrt[n]{3}+1)(\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{3}-1}\cdot\frac{2\sqrt[n]{9}-\sqrt[n]{3}-1}{(\sqrt[n]{3}+1)(\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}+1)} = \frac{1}{\cancel{\sqrt[n]{3}-1}}\cdot\frac{\cancel{(\sqrt[n]{3}-1)}(2\sqrt[n]{3}+1)}{(\sqrt[n]{3}+1)(\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}+1)} \longrightarrow \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2-x-1 = 2\left(x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2-\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2-\tfrac{9}{16}\right] = 2\left(x-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}\right)\left(x-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\right) = 2(x-1)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) =$$

$$=(x-1)(2x+1)$$

$$c_n = \frac{1}{n}\sqrt[6]{n^5+(n+1)^5+\dots+(2n)^5} = \left(\frac{n^5+(n+1)^5+\dots+(2n)^5}{n^6}\right)^{1/6}$$

$x_n = n^5+(n+1)^5+\dots+(2n)^5$ $\qquad \frac{x_n}{y_n} = \dots$ korzystamy z tw. Stolze $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(n+1)^5+\dots+(2n+2)^5-(n^5+\dots}{(n+1)^6-n^6}$

$y_n = n^6$

$$\frac{\dots(2n)^5)}{} = \frac{(2n+1)^5+(2n+2)^5-n^5}{6n^5+\dots} = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^5+\left(2+\frac{2}{n}\right)^5-1}{6+\frac{1}{n}(\dots)} \longrightarrow \frac{2^5+2^5-1}{6} = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6}$$

$$c_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[6]{63/6}$$

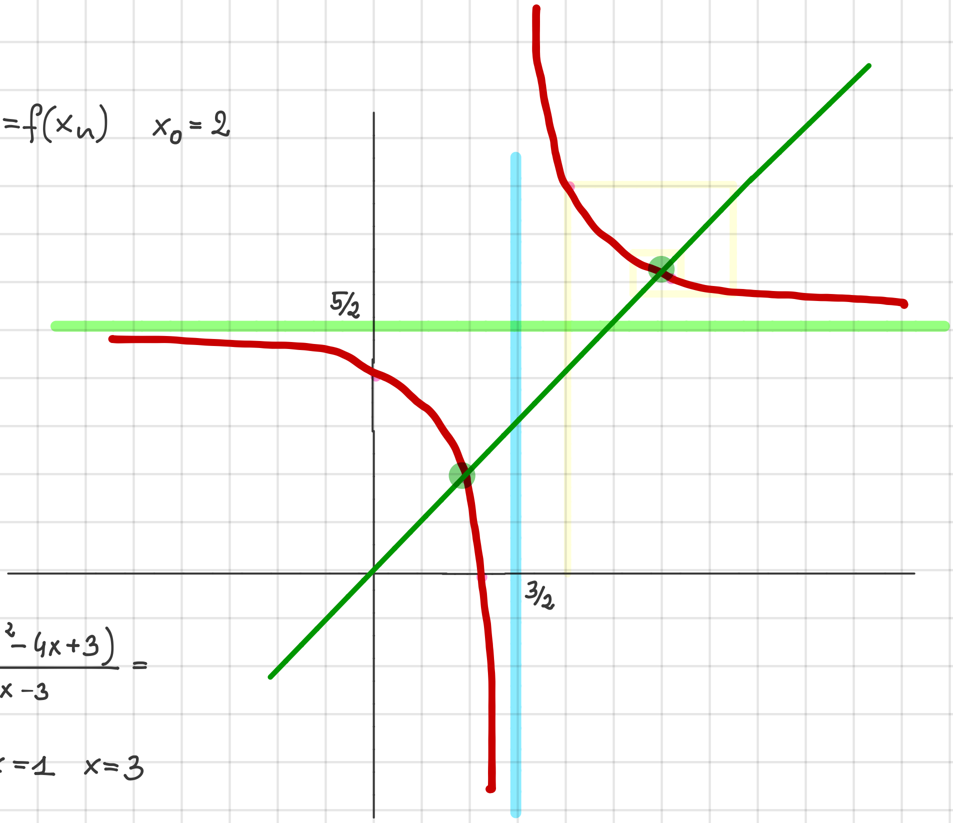
$$d_n = \frac{n^{2n}}{2^n(2n)!} \qquad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{2^{n+1}(2n+2)!}\cdot\frac{2^n(2n)!}{n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}(n+1)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow e^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{e^2}{8} < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

ZADANIE 4

$f(x)=\frac{5x-6}{2x-3}$ $\quad x_{n+1}=f(x_n)$ $\quad x_0=2$

$f(x)=\frac{5}{2}+\frac{3/2}{2x-3}$



$f(x)=x \quad \frac{5x-6}{2x-3}=x$

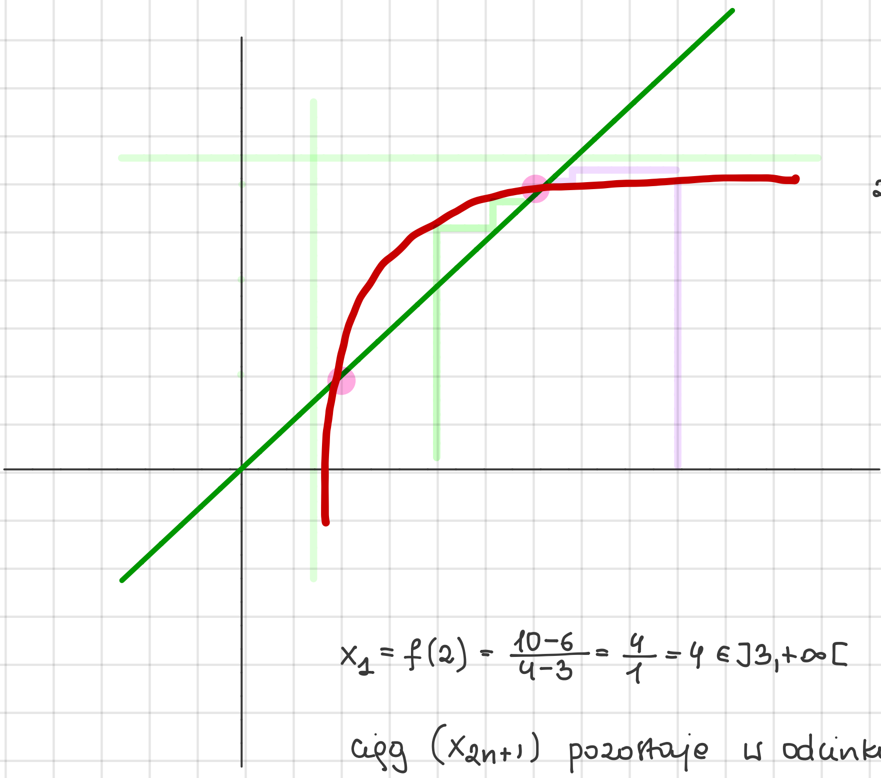
$\frac{5x-6-2x^2+3x}{2x-3}=0$

$\frac{-2x^2+8x-6}{2x-3}=0=\frac{-2(x^2-4x+3)}{2x-3}=$

$=\frac{-2(x-3)(x-1)}{2x-3}$ $\quad x=1 \quad x=3$

$x_0=2\in\,]3/2,3[$ $\quad f(]3/2,3[)=]3,+\infty[$ $\quad f(]3,+\infty[)=]5/2,3[\subset]3/2,3[$ ciąg jest oscylujący wokół liczby 3. Będziemy więc badać podciągi parzysty i nieparzysty

$\begin{bmatrix}5 & -6\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -6\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -12\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ $\quad f\circ f(x)=\frac{13x-12}{4x-3}=\frac{13}{4}+\frac{-9/4}{4x-3}$



$f\circ f=g$

$x_0=2\in\,]1,3[$ $\quad g(]1,3[)=]1,3[$, zatem $\forall n \; x_{2n}\in\,]1,3[$

dodatkowo w tym przedziale $g(x)>x$, zatem ciąg (x_{2n}) jest rosnący.

Ciąg (x_{2n}) jest zbieżny do liczby 3 jako rosnący i ograniczony

$x_1=f(2)=\frac{10-6}{4-3}=\frac{4}{1}=4\in\,]3,+\infty[$ $\quad f(]3,\infty[)=]3,\frac{13}{4}[\subset\,]3,\infty[$

ciąg (x_{2n+1}) pozostaje w odcinku $]3,\frac{13}{4}[$ jest więc ograniczony $g(x)<x$ zatem (x_{2n+1}) jest malejący. Jest to więc ciąg zbieżny do liczby 3.

Podciągi parzysty i nieparzysty są oba zbieżne do tej samej granicy równej 3. Łącznie, podciągi te wyczerpują wszystkie wyrazy ciągu. Ciąg x_n jest więc zbieżny do liczby 3.

ZADANIE 2

Dowodzimy indukcyjnie, że $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

$n=1$: $L=1$, $P=1$, $L=P$ o.k.

Założenie indukcyjne : $1^3+2^3+\dots+k^3=(1+2+\dots+k)^2$

Teza :

$$1+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\dots+k+k+1)^2$$

Dowód : Użyjemy wzoru $1+2+\dots+l=\frac{1}{2}l(l+1)$

$$1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\dots+k)^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\frac{1}{4}\left[k^2+4k+4\right]=$$

$$=(k+1)^2\frac{1}{4}(k+2)^2=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=(1+2+\dots+k+k+1)^2 \quad \blacksquare$$

ZADANIE 1

Wzór na prostą przechodzącą przez $(1+t,1+t)$ i $(t-1,1-t)$

$$\begin{aligned} &(1+t)=a(1+t)+b \\ -\ &(1-t)=a(t-1)+b \\ \hline \end{aligned}$$

$1+t-1+t=a(1+t-t+1)$ $\quad 2t=a\cdot 2$ $\quad \boxed{a=t}$

$b=(1+t)-t(1+t)=1+t-t-t^2=1-t^2$

$\boxed{b=1-t^2}$

Prosta $y=tx+1-t^2$ ogranicza P_t z góry, tzn

$P_t=\{(x,y):\ y<tx+1-t^2\}$

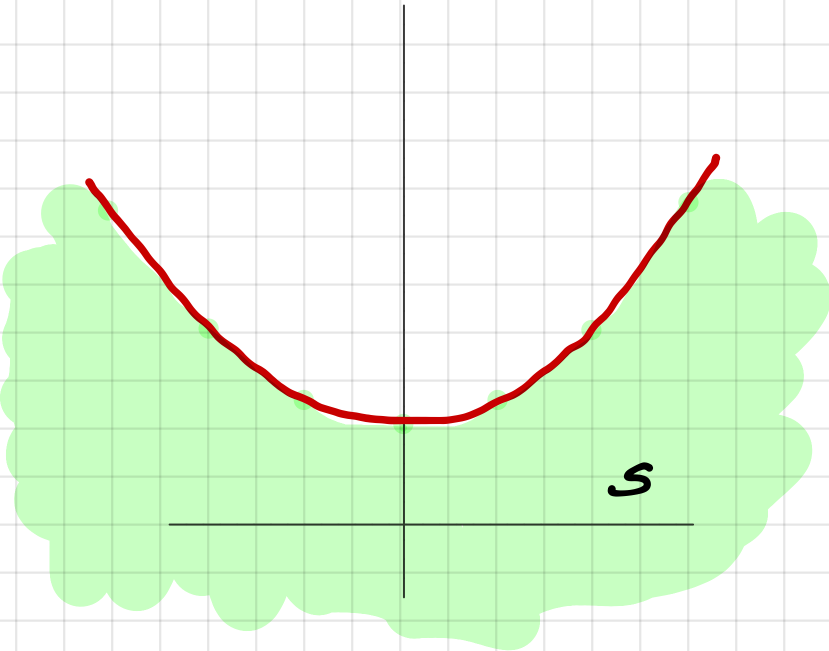
$S=\bigcup_{t\in\mathbb{R}}P_t$ $\quad (x,y)\in S \iff \exists t:\ y<tx+1-t^2$ tzn $-t^2+1+tx-y>0$

tzn $t^2-tx+y-1<0$

$\exists t:\ t^2-tx+y-1<0$ warunkiem istnienia takiego t jest aby wyróżnik Δ był dodatni:

$\Delta=x^2-4(y-1)$ $\quad x^2-4y+4>0$ $\quad 4y<x^2+4$ $\quad y<\frac{1}{4}x^2+1$

$S=\{(x,y):\ y<\frac{1}{4}x^2+1\}$



$T = \bigcap_{t\in[-1,1]} P_t$ $\qquad (x,y)\in T \iff \forall t\in[-1,1] \quad t^2 - tx + y - 1 < 0$

$\Delta = x^2 - 4(y-1)$ $\qquad t_1 = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2-4y+4}\right)$ $\qquad t_2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-4y+4}\right)$

$\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{\quad}\right) < -1$ $\quad$ i $\quad$ $\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{\quad}\right) > 1$ $\quad$ + warunek $\Delta > 0$

$x - \sqrt{\quad} < -2$ $\qquad x + \sqrt{\quad} > 2$ $\qquad$ tzn $y < \frac{1}{4}x^2 + 1$

$-\sqrt{\quad} < -2 - x$ $\qquad \sqrt{\quad} > 2 - x$

$\sqrt{\quad} > x + 2$

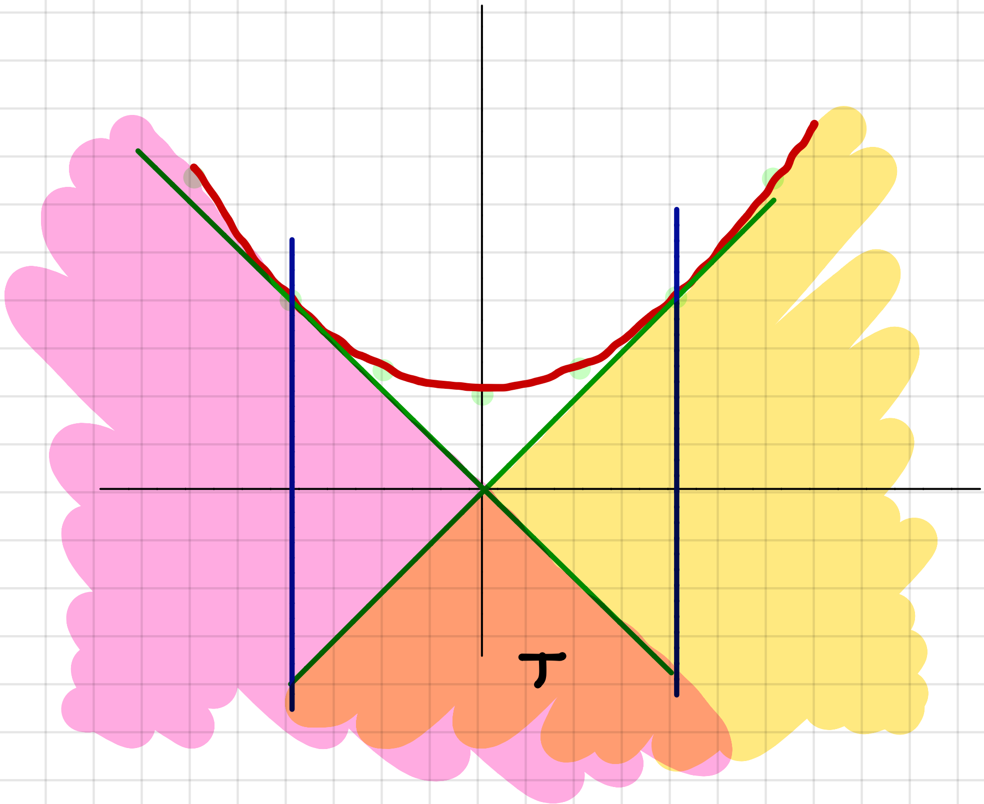
$x > 2$ lub

$x < -2$ lub $\quad \cancel{x^2} - 4y + \cancel{4} > \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4}$ $\qquad \cancel{x^2} - 4y + \cancel{4} > \cancel{4} - 4x + \cancel{x^2}$

$-4y > 4x$ $\qquad -y > -x$

$y < -x$ $\qquad y < x$

$(x < -2$ lub $y < -x)$ i $(x > 2$ lub $y < x)$ i $y < \frac{1}{4}x^2 + 1$



$T = \{(x,y) : \quad y > -x \; ; \quad y < x \}$