ZADANIE 1

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ obraz γ jest linią śrubową „nawiniętą" na walec, którego osią jest OZ, promień podstawy 1, skok śruby 2π.

Wektor styczny w punkcie $\gamma(t)$ to $\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$ wobec tego prosta w $\mathbb{R}^3$ styczna do γ w punkcie $\gamma(t)$ w postaci parametrycznej to

$$s \longmapsto \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

prosta przecina płaszczyznę XOY w punkcie dla którego zachodzi $t + s = 0 \Rightarrow s = -t$

Krzywa A opisana jest za pomocą parametryzacji w następujący sposób:

$$A = \{(x, y, 0) : x(t) = \cos t + t\sin t,\ y(t) = \sin t - t\cos t\}$$

Każda ze współrzędnych zależy od t w sposób gładki. Badamy rząd parametryzacji $\kappa(t) = (x(t), y(t), 0)$

$$\kappa'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t + \sin t + t\cos t \\ \cos t - \cos t + t\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

macierz $\kappa'(t)$ ma rząd 1 wszędzie poza $t = 0$.

Na podstawie twierdzenia o zadawaniu powierzchni przy pomocy parametryzacji stwierdzić można, że dla każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje otoczenie Θ_t punktu t w $\mathbb{R}$ takie, że $\kappa(\Theta_t)$ jest powierzchnią, w tym przypadku gładką krzywą.

Sprawdzić należy (1) $t = 0$, (2) czy istnieją samoprzecięcia, (3) zachowanie w nieskończoności

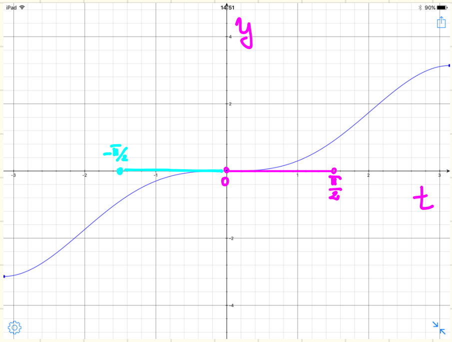
$t = 0$. Zauważmy że $x(-t) = \cos(-t) + (-t)\sin(-t) = \cos t + t\sin t = x(t)$
$y(-t) = \sin(-t) - (-t)\cos(-t) = -\sin t + t\cos t = -y(t)$. Krzywa A jest więc symetryczna względem osi OX. Obraz tej krzywej w otoczeniu $t = 0$ nie może być wykresem funkcji $x \longmapsto y(x)$ ale może być wykre-

sem funkcji $y \longmapsto x(y)$

$y(t) = \sin t - t\cos t$ $\quad y'(t) = t\sin t$. Dla $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $\quad y'(t) > 0$ $\quad y$ jest rosnąca. $y|_{]0,\frac{\pi}{2}[} :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]0, 1[$ jest bijekcją. Istnieje odwzorowanie odwrotne, różniczkowalne. Oznaczmy je τ_+

$$\tau_+ :]0,1[\longrightarrow]0, \tfrac{\pi}{2}[$$

$$x_+(y) = x(\tau_+(y))$$



Dla $t \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

$y'(t) > 0$ i $y|_{]-\frac{\pi}{2},0[}$ jest bijekcją

$]-\frac{\pi}{2}, 0[\longrightarrow]-1, 0[$

Istnieje różniczkowalne odwzorowanie odwrotne $\tau_- :]-1,0[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, 0[$

$x_-(y) = x(\tau_-(y))$ $\quad \lim_{y \to 0^-} x_-(y) = 1$, $\quad \lim_{y\to 0^+} x_+(y) = 1$.

UWAGA: W rozwiązaniu na kolokwium nie wymagałam szczegółowego badania osobliwości $t=0$. Dodałam to tutaj w celach dydaktycznych.

Funkcja $x :]-1,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ taka, że

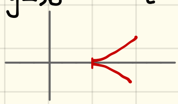
$x(y) = x_+(y)$ dla $y \in]0,1[$
$x(y) = x_-(y)$ dla $y \in]-1,0[$
$x(0) = 1$

jest ciągła i różniczkowalna poza $y=0$. ponadto

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dy} = \frac{x'}{y'}(\tau_\pm(y)) \quad \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{t\cos t}{t\sin t} = \operatorname{ctg} t$$

$y \to 0^+$ oznacza $t \to 0^+$ i $y \to 0^-$ oznacza $t \to 0^-$, zatem

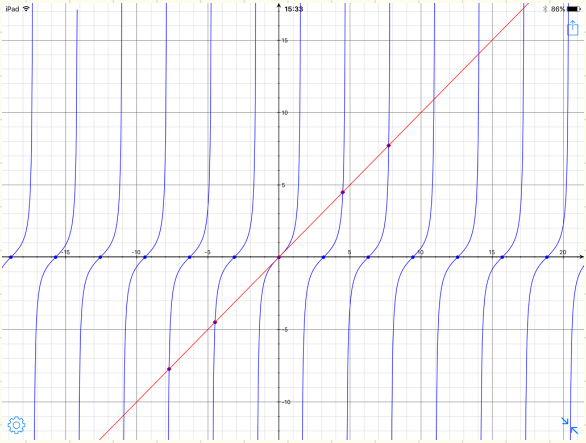
$\lim_{y\to 0^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{ctg} t = +\infty$ $\quad \lim_{y\to 0^-} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to 0^-} \operatorname{ctg} t = -\infty$. Osobliwość w $t=0$ jest więc „dziubkiem"



(2) Samoprzecięcia

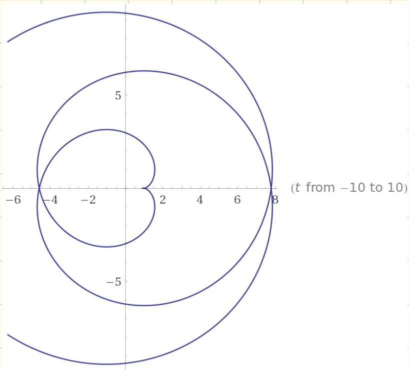
$x^2(t)+y(t)^2 = 1+t^2$ Odległość punktu $(x(t), y(t), 0)$ od $(0,0,0)$ jest $\sqrt{1+t^2}$. Oznacza to że samoprzecięcie może wystąpić jedynie dla $t=-t$. W takim przypadku $x(-t)=x(t)$ ale $y(-t)=-y(t)$ zatem warunek na samoprzecięcie jest $y(t)=0$

$\sin t - t\cos t = 0$ $\sin t = t\cos t$ $t = \operatorname{tg} t$ ← to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, po jednym w każdym odcinku $]k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}[$.



We wszystkich tych punktach są samoprzecięcia krzywej.

(3) $r(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} = \sqrt{1+t^2}$. Obie części krzywej, dla $t>0$ i $t<0$ uciekają do nieskończoności, nie ma więc więcej punktów osobliwych.



Krzywa A na płaszczyźnie

ZADANIE 2

$$y'' + 2y' + 5y = \sin 2x \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=0$$

Jest to równanie liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach niejednorodne, z warunkami początkowymi

Rozwiązujemy równanie jednorodne (RJ)
Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Delta = 4 - 4\cdot 5 = -16 \quad \sqrt{\Delta} = \pm 4i$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Takie wartości własne prowadzą do następujących rozwiązań fundamentalnych RJ

$$y_1(x) = e^{-x}\sin 2x \qquad y_2(x) = e^{-x}\cos 2x$$

RORJ: $y(x) = Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x$

Szukamy rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN) metodą zgadywania. Postulowana postać RSRN:

$$\left.\begin{aligned} y_s(x) &= a\sin 2x + b\cos 2x \\ y_s'(x) &= 2a\cos 2x - 2b\sin 2x \\ y_s''(x) &= -4a\sin 2x - 4b\cos 2x \end{aligned}\right\} \text{Wstawiamy do RN}$$

$$-4a\sin 2x - 4b\cos 2x + 4a\cos 2x - 4b\sin 2x + 5a\sin 2x + 5b\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 2x(-4a - 4b + 5a) + \cos 2x(-4b + 4a + 5b) = \sin 2x$$

$$\sin 2x(a - 4b) + \cos 2x(b + 4a) = \sin 2x$$

$a - 4b = 1 \qquad a + 16a = 1 \rightarrow a = 1/17$

$b + 4a = 0 \rightarrow b = -4a$

$b = -\frac{4}{17}$

RSRN

$$y_s(x) = \frac{1}{17}\sin 2x - \frac{4}{17}\cos 2x$$

Otrzymaliśmy RORN:

$$y(x) = Ae^{-x}\sin 2x + Be^{-x}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x - \frac{4}{17}\cos 2x$$

Pora na warunki początkowe:

$$y(0) = B - \frac{4}{17} = 0 \Rightarrow B = \frac{4}{17}$$

$$y'(x) = -Ae^{-x}\sin 2x + 2Ae^{-x}\cos 2x - Be^{-x}\cos 2x - 2Be^{-x}\sin 2x + \frac{2}{17}\cos 2x + \frac{8}{17}\sin 2x =$$

$$=\Big|_{x=0} 2A - B + \frac{2}{17} = 0 \qquad 2A - \frac{4}{17} + \frac{2}{17} = 0 \quad 2A = \frac{2}{17} \quad A = \frac{1}{17}$$

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA POCZĄTKOWEGO

$$y(x) = \frac{1}{17}e^{-x}\sin 2x + \frac{4}{17}e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x - \frac{4}{17}\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{17}\left(e^{-x}+1\right)\sin 2x + \frac{4}{17}\left(e^{-x}-1\right)\cos 2x$$

Oczywiście jeśli się nie umie zgadnąć rozwiązania szczególnego, można uzmiennić stałe, tylko że z tym jest dużo roboty:

Rozwiązanie ogólne równania pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$ jest postaci $$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$ Po wstawieniu do

równania niejednorodnego i uzmiennieniu stałych A i B dostajemy

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x}\sin 2x & e^{-x}\cos 2x \\ -e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x & -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

$$\det[\dots] = e^{-2x}\left(-\sin 2x\cos 2x - 2\sin^2 2x + \cos 2x \sin 2x - 2\cos^2 2x\right) = -2e^{-2x}$$

$$? = -\frac{1}{2}e^{2x}\begin{bmatrix} -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x & -e^{-x}\cos 2x \\ e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x & e^{-x}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = +\frac{1}{2}e^{x}\begin{bmatrix} \cos 2x \sin 2x \\ \sin^2 2x \end{bmatrix}$$

$$A' = +\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x \sin 2x = -\frac{1}{4}e^{x}\sin 4x$$

$$B' = -\frac{1}{2}e^{x}\sin^2 2x = -\frac{1}{4}\left(1-\cos 4x\right)e^{x}$$

$$A(x) = +\frac{1}{4}\int e^{x}\sin 4x \, dx \qquad B(x) = -\frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{4}\int e^{x}\cos 4x \, dx$$

$$\left(a e^{x}\sin 4x + b e^{x}\cos 4x\right)' = \left(a\sin 4x + b\cos 4x + 4a\cos 4x - 4b\sin 4x\right)e^{x} =$$

$$= \left[(a-4b)\sin 4x + (b+4a)\cos 4x\right]e^{x}$$

$a - 4b = 1$
$b + 4a = 0$
$b = -4a$
$a + 16a = 1$
$a = \frac{1}{17}$
$b = -\frac{4}{17}$

$a - 4b = 0$
$b + 4a = 1$
$a = 4b$
$b + 16b = 1$
$b = \frac{1}{17}$
$a = \frac{4}{17}$

$$A(x) = +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{17}e^{x}\sin 4x - \frac{4}{17}e^{x}\cos 4x\right) + A_0$$

$$B(x) = -\frac{1}{4}e^{x} + \left(\frac{4}{17}e^{x}\sin 4x + \frac{1}{17}e^{x}\cos 4x\right)\frac{1}{4} + B_0$$

UWAGA: Tutaj nie pomyliłam się wyłącznie dlatego, że wiedziałam ile ma wyjść i tak długo sprawdzałam znaki aż wyszło co trzeba. Dlatego należy zgadywać RSRN!!!

RSRN:

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{17}e^{x}\sin 4x - \frac{4}{17}e^{x}\cos 4x\right)e^{-x}\sin 2x + \left[-\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{17}e^{x}\sin 4x + \frac{1}{17}e^{x}\cos 4x\right)e^{-x}\cos 2x\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[+\frac{1}{17}\sin 4x \sin 2x - \frac{4}{17}\cos 4x \sin 2x - \cos 2x + \frac{4}{17}\sin 4x\cos 2x + \frac{1}{17}\cos 4x \cos 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(+\frac{1}{17}\right)\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{17}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x = \boxed{\frac{1}{17}\sin 2x - \frac{4}{17}\cos 2x}$$