Egzamin z Analizy Matematycznej I ind.
30 stycznia 2020

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Zbadać przebieg zmienności (ciągłość, jednostajna ciągłość, granice na krańcach dziedziny, asymptoty, różniczkowalność, ekstrema, przedziały monotoniczności i wypukłości) funkcji:

$$f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x+1}.$$

Zadanie 2. Niech X oznacza przestrzeń $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na odcinku $[0,1]$. W przestrzeni tej rozważamy metrykę

$$d(f,g) = \sup_{[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Symbolem ζ oznaczamy funkcję stałą na odcinku $[0,1]$ równą 0. Zbadać czy poniższe zbiory są otwarte, domknięte, zwarte, spójne

$$A = \{f \in X : d(f,\zeta) \leqslant 1\}, \qquad B = \{f \in X : d(f,\zeta) \leqslant 1 \text{ i } \forall t \in [0,1]\, f(t) \neq 0\}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć granice (jeśli istnieją):

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} (\sin^2 x)^{1-\cos x}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}.$$

Zadanie 4. Obliczyć całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

ZADANIE 1.

$$f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x+1}.$$

Dziedzina $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^{2/3}}{x+1} = 0 \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^{2/3}}{x+1} = 0 \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^{2/3}}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^{2/3}}{x+1} = +\infty \qquad f(0) = 0$$

$$f(x) = 2x^{2/3}(x+1)^{-1}$$

Dla $x \neq 0$:

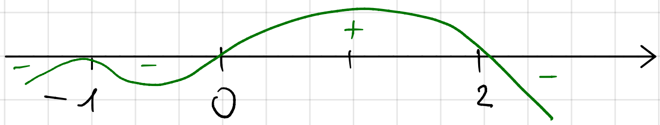
$$f'(x) = 2 \cdot \tfrac{2}{3} x^{-1/3}(x+1)^{-1} + 2 \cdot x^{2/3}(-1)(x+1)^{-2} = \frac{x^{-1/3}}{(x+1)^2}\left[\frac{4}{3}(x+1) + 2x(-1)\right]$$

$$= \frac{x^{-1/3}}{(x+1)^2}\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right)$$

Pochodna w $x=0$: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2x^{2/3}}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^{-1/3}(x+1)}$ granica nie istnieje

Funkcja nie jest różniczkowalna w 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$



Pochodna zmienia znak dla $x=0$ i $x=2$.

minimum lokalne

maksimum lokalne

Funkcja maleje na $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]2,+\infty[$

Funkcja rośnie na $]0,2[$

Funkcja jest ciągła na $]-\infty,-1[$ i $]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x^{-1/3}}{(x+1)^2}\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right) = x^{-1/3}(x+1)^{-2}\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right) \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{3}x^{-4/3}(x+1)^{-2}\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right) +$$

$$+ x^{-1/3}(-2)(x+1)^{-3}\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right) + x^{-1/3}(x+1)^{-2}\left(-\tfrac{2}{3}\right) = x^{-4/3}(x+1)^{-3}\Big[-\tfrac{1}{3}\overbrace{(x+1)\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right)}^{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}} +$$

$$\underbrace{x(-2)\left(-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right)}_{\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x} + \underbrace{x(x+1)\left(-\tfrac{2}{3}\right)}_{-\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x}\Big] = x^{4/3}(x+1)^{-3}\left[\tfrac{2}{9}x^2 - \tfrac{2}{9}x - \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{8}{3}x - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x\right] =$$

$$x^{4/3}(x+1)^{-3}\left[\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x\right]=$$

$$=\frac{1}{x^{4/3}(x+1)^3}\left[\frac{8}{9}x^2-\frac{32}{9}x-\frac{4}{9}\right]=\frac{8x^2-32x-4}{9x^{4/3}(x+1)^3}=\frac{4}{9}\,\frac{2x^2-8x-1}{x^{4/3}(x+1)^3}=\frac{8(x-x_1)(x-x_2)}{9x^{4/3}(x+1)^3}$$

$$\Delta = 64+4\cdot 2=72 \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{9\cdot 8}=6\sqrt{2}$$

$$x_1=\frac{8+6\sqrt{2}}{4}=2+\frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad x_2=2-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$\parallel \qquad \parallel$

$4{,}12.. \qquad -0{,}12$

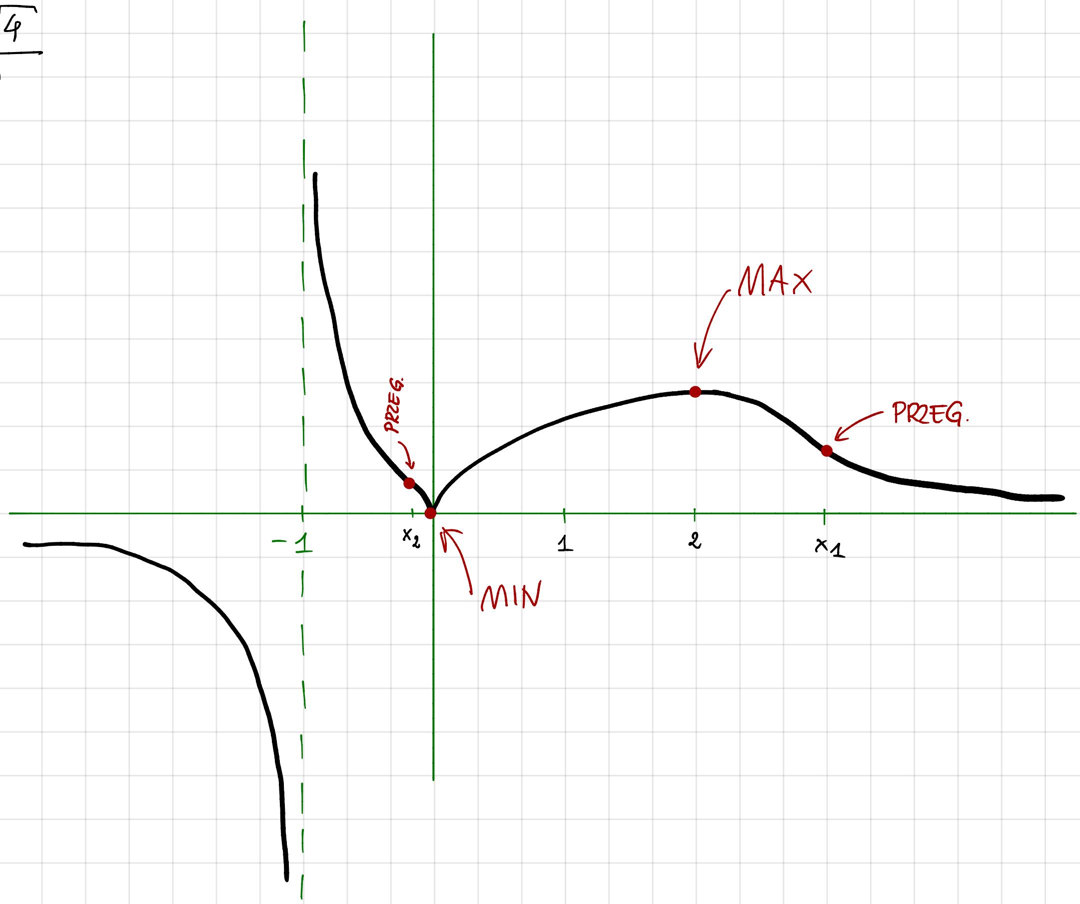
Funkcja wypukła na
$]-1,x_2[$ i $]x_1,+\infty[$

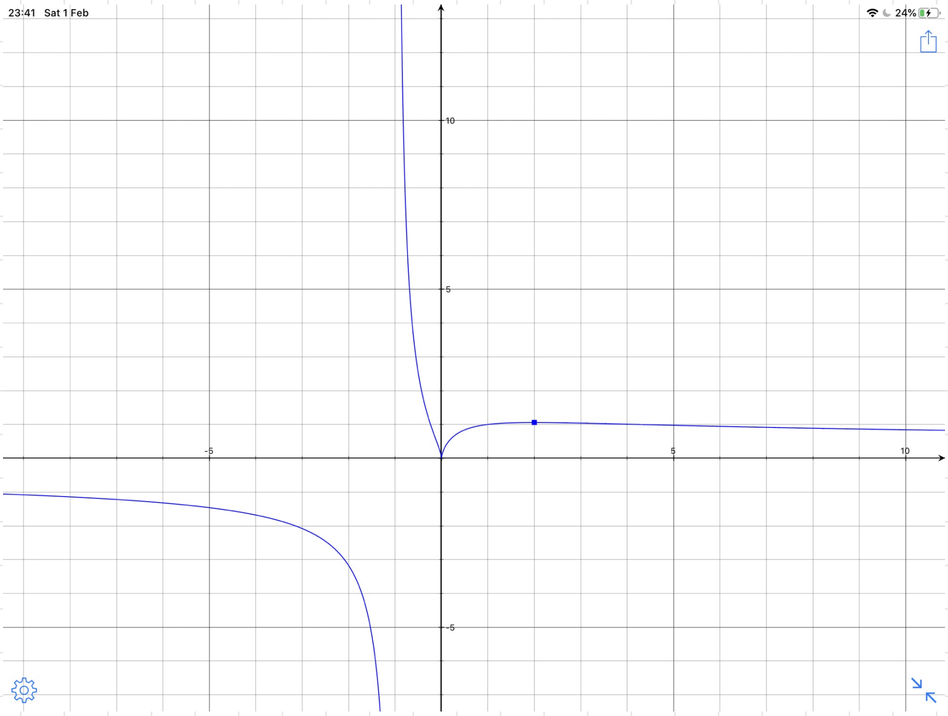
Funkcja wklęsła na $]-\infty,-1[$ i $]x_2,x_1[$

Punkty przegięcia x_2, x_1.

	$-\infty$		-1		x_2		0		2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	|	$-$	$-$	$-$	|	$+\ +$	0	$-$	$-$	$-\ -$	
$f''(x)$		$-\ -$	|	$+$	0	$-$	|	$-\ -$	$-\ -$		0	$+\ +$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\rightarrow$	0

$$f(2)=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$$





Funkcja jest jednostajnie ciągła na $[-1+\varepsilon, \infty[$ i $]-\infty, -1-\varepsilon]$

ZADANIE 2

$$A = \{f \in X : d(f,\zeta) \leqslant 1\}, \qquad B = \{f \in X : d(f,\zeta) \leqslant 1 \text{ i } \forall t \in [0,1]\ f(t) \neq 0\}.$$

Zbiór A jest kulą domkniętą o środku w ζ i promieniu 1. Kulę domkniętą można przedstawić jako przeciwobraz zbioru domkniętego $[0,1] \subset \mathbb{R}$ za pomocą odwzorowania ciągłego. Odwzorowanie to jest odległością punktu od środka kuli:

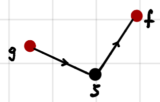
$$D: X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad D(f) = d(f, \zeta)$$

Ciągłość metryki dowodziliśmy na wykładzie. Zbiór A jest więc DOMKNIĘTY

Oznaczmy symbolem g_y funkcję stałą na odcinku $[0,1]$ o wartości y. Funkcja g_1 jest elementem A. Niech $r>0$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Funkcja $g_{1+r/2}$ nie jest elementem A natomiast jest elementem $K(g_1, r)$ co pokazuje, że A NIE JEST OTWARTY

Pokażemy, że zbiór A jest łukowo spójny. Istotnie, weźmy dwa dowolne punkty f i g ze zbioru A. Punkty te można połączyć ciągłym obrazem odcinka:

$$\gamma: [-1,1] \ni t \longmapsto \begin{cases} -tg & t \in [-1,0[\\ tf & t \in [0,1] \end{cases}$$



Zbiór A jest więc SPÓJNY

Rozważmy ciąg $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów X $h_n(x) = x^n$. Punktowo ciąg ten jest zbieżny do funkcji h_∞ przyjmującej wartość 0 dla $x \in [0,1[$ i $h_\infty(1) = 1$. Ciąg (h_n) nie jest więc zbieżny w X i żaden jego podciąg nie jest zbieżny. To pokazuje, że zbiór A NIE JEST ZWARTY

Zbiór B jest zawarty w A. Łatwo sprawdzić, że NIE JEST DOMKNIĘTY, gdyż ζ jest punktem skupienia B nie należącym do B. Istotnie: ciąg $g_{1/n}$ ma granicę ζ. Zbiór B NIE JEST OTWARTY – działa ten sam argument co dla A. Zbiór B NIE JEST ZWARTY, skoro nie jest domknięty.

Zbiór B NIE JEST SPÓJNY. Istotnie, każda funkcja z X jest ciągła, zatem warunek $f \neq 0$ oznacza f dodatnie albo f ujemne. Oznaczmy $X_+ = \{f \in X : \forall t \in [0,1]\ f(t) > 0\}$ i $X_- = \{f \in X : \forall t \in [0,1]\ f(t) < 0\}$. Zbiory X_+ i X_- są rozgraniczone $\overline{X_+} = \{f \in X : f(t) \geq 0\}$ $\overline{X_-} = \{f \in X : \forall t \in [0,1]\ f(t) \leq 0\}$

$$\overline{X_+} \cap X_- = \emptyset = X_+ \cap \overline{X_-}$$

Fakt, że $B \cap X_+ \neq \emptyset$ i $B \cap X_- \neq \emptyset$ daje tezę.

ZADANIE 3

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$
$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} - \dots = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \dots$$

Rozwijamy funkcję $y \xmapsto{f} \sqrt{1+y}$ wokół $y=0$

$$f(0)=1 \qquad f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{1+y}} \qquad f''(y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+y)^{-3/2}$$
$$f'(0) = \frac{1}{2} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \dots \qquad \sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1-2x^2+\frac{2x^4}{3} - \dots} = 1 + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \dots\right) - \frac{1}{8}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \dots\right)^2 + \dots =$$
$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{8}\cdot 4x^4 + \dots = 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

$$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)\left(1-x^2-\frac{1}{6}x^4+\dots\right)}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{3}{2}x^2+\dots\right)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 3/2$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin^2 x)^{1-\cos x}$,

$$\log\left((\sin^2 x)^{1-\cos x}\right) = (1-\cos x)\cdot 2\cdot \log \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 2\cdot \log 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$
$$4\sin\frac{x}{2}\Big[\underset{\downarrow 0}{\sin\frac{x}{2}}\log 2 + \underbrace{\sin\frac{x}{2}\log\sin\frac{x}{2}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\underset{\downarrow 0}{\sin\frac{x}{2}}\log \underset{\downarrow 1}{\cos\frac{x}{2}}}_{\downarrow 0}\Big] \xrightarrow{x\to 0} 0$$

bo $\lim\limits_{y\to 0} y\log y$

$$\lim_{x\to 0}(\sin^2 x)^{1-\cos x} = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

$$\log\left(\cos x^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}\right) = \frac{1}{\log(1+x^2)}\log\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{\log(1+x^2)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{(1+x^2)\sin x}{2x\cos x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1}\ \overbrace{\frac{1+x^2}{\cos x}}^{\to 1}\Big) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim (\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ZADANIE 4

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$$

Funkcja podcałkowa zależy od sin i cos w parzystych potęgach, standardowym podstawieniem jest więc $t=tgx$. Funkcja $x\mapsto tgx$ nie jest jednak monotoniczna na przedziale $[0,2\pi]$.
Funkcje $x\mapsto \sin^2x$ i $x\mapsto\cos^2x$ są okresowe z okresem π. Można więc napisać

$$I=2\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$$

Dodatkowo $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ i $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, zatem $\sin^4\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin^4(x)+\cos^4(x)$,
tak więc mamy równość:

$$I=4\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}.$$

Teraz można już dokonać podstawienia $t=tgx$ $\quad dt=\frac{1}{\cos^2x}dx=(1+t^2)\,dx$

$$dx=\frac{dt}{1+t^2},\quad \cos^2x=\frac{1}{1+t^2}\quad \sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2}$$

$$I=4\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=4\int_0^{\infty}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2+\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}=4\int_0^{\infty}\frac{(1+t^2)\,dt}{1+t^4}=\quad *$$

$$1+t^4=\left(t-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i\right)\left(t-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)\left(t+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i\right)\left(t+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)=(t^2-\sqrt2t+1)(t^2+\sqrt2t+1)$$

↑ pierwiastki stopnia 4 z (−1)

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{A}{t^2+\sqrt2t+1}+\frac{B}{t^2-\sqrt2t+1}\implies A=B=\frac12$$

$$t^2+\sqrt2t+1=\left(t+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\frac12=\frac12\left(2\left(t+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1\right)=\frac12\left((\sqrt2t+1)^2+1\right)\qquad t^2-\sqrt2t+1=\frac12\left((\sqrt2t-1)^2+1\right)$$

$$*=4\int_0^{\infty}\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{\frac12}\left[(\sqrt2t+1)^2+1\right]}+\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{\frac12}\left[(\sqrt2t-1)^2+1\right]}\,dt=4\left[\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}(\sqrt2t+1)+\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}(\sqrt2t-1)\right]\Bigg|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\cancel{\operatorname{arctg}(1)}-\cancel{\operatorname{arctg}(-1)}\right]=\frac{4\pi}{\sqrt2}=2\sqrt2\,\pi$$