ZADANIE 1 Na przestrzeni $V = \mathcal{C}([0,1])$ z normą supremum definiujemy odwzorowanie $F: V \to \mathbb{R}$

$$F(v) = \int_0^1 t^2 v(t)\, v(1-t)\, dt$$

Znaleźć $\nabla_h F$ oraz zbadać różniczkowalność F.

ZADANIE 1 Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $(x,y) \longmapsto z(x,y)$ danej niejawnie równaniem

$$0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 - z - 2$$

ZADANIE 3 Dla $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ znaleźć rozwiązanie ogólne równania liniowego

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^t \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

ZADANIE 4 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$yy'' = (y')^2 \log|y'| \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1/2$$

ZADANIE 5 Znaleźć moment bezwładności jednorodnego stożka o promieniu podstawy r i wysokości h względem osi zawierającej tworzącą tego stożka.

ROZWIĄZANIA

(1) $$F(v+h) = \int_0^1 t^2 (v+h)(t)(v+h)(1-t)\,dt = \int_0^1 t^2 v(t) v(1-t)\,dt + \int_0^1 t^2 h(t) v(1-t)\,dt + \int_0^1 t^2 v(t) h(1-t)\,dt$$
$$+ \int_0^1 t^2 h(t) h(1-t)\,dt$$

$s = 1-t \quad t = 1-s$

$ds = -dt$

$$\nabla_h F(v) = \int_0^1 t^2 h(t) v(1-t)\,dt + \int_0^1 t^2 v(t) h(1-t)\,dt = \int_0^1 t^2 h(t) v(1-t)\,dt + \int_1^0 (1-s)^2 v(1-s) h(s)(-ds) =$$
$$= \int_0^1 t^2 h(t) v(1-t)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2 h(t) v(1-t)\,dt = \int_0^1 (t^2 + (1-t)^2) v(1-t) \cdot h(t)\,dt$$

$$\nabla_h F(v) = \int_0^1 (t^2 + (1-t)^2) v(1-t)\, h(t)\,dt$$

Widać, że $h \longmapsto \nabla_h F(v)$ jest odwzorowaniem liniowym. Sprawdzamy czy jest to odwzorowanie ciągłe

$$|\nabla_h F(v)| = \left|\int_0^1 (t^2 + (1-t)^2) v(1-t) h(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 (t^2 + (1-t^2)) |v(1-t)| |h(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\left[\int_0^1 (t^2 + (1-t^2)) |v(1-t)|\,dt\right]}_{\text{stała liczba zależna od punktu w którym różniczkujemy}} \|h\|$$

$h \longmapsto \nabla_h F$ jest ograniczone a więc ciągłe.

Reszta $r(\vartheta,h)$ ma postać $\quad r(\vartheta,h)=\int_0^1 t^2\, h(t)h(1-t)\,dt$

$$|r(\vartheta,h)|\leqslant \int_0^1 t^2\,|h(t)h(1-t)|\,dt \leqslant \|h\|^2\int_0^1 t^2\,dt=\|h\|^2\frac{1}{3}$$

$$\frac{|r(\vartheta,h)|}{\|h\|}\leqslant \frac{1}{3}\|h\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

Reszta spełnia warunek $\frac{|r(\vartheta,h)|}{\|h\|}\xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$, zatem F jest różniczkowalne w dowolnym punkcie ϑ.

$$F'(v)h=\nabla_h F(v)=\int_0^1 [t^2+(1-t)^2]\,\vartheta(1-t)h(t)\,dt$$

② $0=\frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3+xyz^2-z-2=:F(x,y,z)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}z^3\,2x+yz^2=xz^3+yz^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{2}z^3\,2y+xz^2=yz^3+xz^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=(x^2+y^2)\frac{3}{2}z^2+2xyz-1$$

Punkty krytyczne spełniają

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0=\frac{\partial F}{\partial y}=F(x,y,z)$$

$$\begin{cases} xz^3+yz^2=0\\ yz^3+xz^2=0\\ \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3+xyz^2-z-2=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2(xz+y)=0\\ z^2(yz+x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow z=0 \text{ lub } \left(\begin{array}{l} xz+y=0\\ yz+x=0\end{array}\right)$$

$F(x,y,0)=-2\neq 0$

zatem $z=0$ nie jest wartością $(x,y)\longmapsto z(x,y)$

$y=-xz$

$-xz^2+x=0 \quad x(1-z^2)=0$

$\to x=0$, $y=0$

$F(0,0,z)=-z-2=0$

$\Rightarrow z=-2$

$\to z=\pm 1$

$z=1$: $x+y=0$, $x=-y$

$z=-1$: $x=y$

$F(-y,y,1)=(y^2+y^2)\frac{1}{2}-y^2-1-2=$

$=-3\neq 0$

to nie jest punkt krytyczny

$F(x,x,-1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2x^2(-1)+x^2(-1)+1-2$

$=-2x^2-1=0$

sprzeczne nad $\mathbb{R}$

Jedynym punktem podejrzanym jest $(0,0,-2)$

$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-2)=-1\neq 0 \quad (x,y)\longmapsto z(x,y)$ istnieje w otoczeniu $(0,0,-2)$

Badamy rodzaj punktu krytycznego. Nie pamiętam wzoru na z'', muszę wyprowadzić

$$F(x,y,z)=0 \to F_x+F_z z_x=0 \text{ i } F_y+F_z z_y=0 \to F_{xx}+\underbrace{F_{xz}z_x}+\underbrace{F_{zx}z_x}+\underbrace{F_{zz}z_x^2}+F_z z_{xx}=0$$

$=0$ w punkcie krytycznym

$z_{xx}=-\frac{1}{F_z}F_{xx}$ Dalej już nie liczę, bo przypomniałam sobie wzór

$$z'' = -\frac{1}{F_z}\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy}\end{bmatrix}$$

$$F_x = xz^3 + yz^2 \qquad F_y = yz^3 + xz^2$$

$$F_{xx} = z^3\Big|_{(0,0,-2)} = -8 \qquad F_{yy} = z^3\Big|_{(0,0,-2)} = -8 \qquad F_{xy} = z^2\Big|_{(0,0,-2)} = 4$$

$$z''(0,0) = -\frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -8\end{bmatrix} \qquad D_1 = -8 < 0, \quad D_2 = 64 - 16 = 48 > 0$$

Druga pochodna ujemnie określona, maksimum

(3)

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = e^t \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

RORJ: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Delta = 4 - 4\cdot 2 = -4 \quad \sqrt{\Delta} = \pm 2i \quad \lambda_{1/2} = (2 \pm 2i)/2 = 1 \pm i$

$x_1(t) = e^t \sin t$

$x_2(t) = e^t \cos t$ RORJ: $x(t) = e^t(A\sin t + B\cos t)$

Uzmiennianie stałych

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2\end{bmatrix}}_{M}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \sin t/\cos^2 t\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t)\end{bmatrix}$$

$$\cancel{A\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1\end{bmatrix}} + \cancel{\frac{d}{dt}B\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B}\end{bmatrix} = \cancel{M\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B\end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t)\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ b(t)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t \sin t & e^t \cos t \\ e^t(\sin t + \cos t) & e^t(\cos t - \sin t)\end{bmatrix}^{-1} = -e^{-2t}\begin{bmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & -e^t \cos t \\ -e^t(\sin t + \cos t) & e^t \sin t\end{bmatrix}$$

wyznacznik $\uparrow$ $e^{2t}\left[\cancel{\sin t\cos t} - \sin^2 t - \cancel{\sin t \cos t} - \cos^2 t\right] = -e^{2t}$

$$\begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{B}\end{bmatrix} = -e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -\cos t \\ \sin t + \cos t & \sin t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^t \frac{\sin t}{\cos^2 t}\end{bmatrix} = -e^{-t}\begin{bmatrix} -e^t \frac{\sin t}{\cos t} \\ e^t \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t \\ -\operatorname{tg}^2 t\end{bmatrix}$$

$\dot{A} = \operatorname{tg} t \qquad A = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\log|\cos t| \underset{\text{na }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}{=} -\log\cos t + A_0$

$\dot{B} = -\operatorname{tg}^2 t \qquad B = -\int \operatorname{tg}^2 t\,dt = -\int \frac{u^2 + 1 - 1}{1+u^2}\,du = -\int\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du = -u + \operatorname{arctg} u + B_0 = -\operatorname{tg} t + t + B_0$

$u = \operatorname{tg} t$

$du = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = (1+u^2)\,dt$

$A(t) = -\log\cos t \qquad B(t) = t - \operatorname{tg} t$

$x(t) = Ae^t\sin t + Be^t\cos t - e^t\sin t\log\cos t + te^t\cos t$

4

$yy'' = (y')^2\log|y'| \qquad y(0)=1 \qquad y'(0) = -1/2$

Podstawiamy $y' = v(y) \qquad y'' = \frac{dv}{dy}y' = v\frac{dv}{dy} \qquad y\cancel{v}\frac{dv}{dy} = v^{\cancel{2}}\log|v| \qquad y\frac{dv}{dy} = v\log|v|$

$\frac{dv}{v\log|v|} = \frac{dy}{y} \qquad \log|\log|v|| = \underbrace{\log|y| + \log A}_{=\log A|y|} \qquad A>0$

$|\log|v|| = A|y|$ jeśli A dowolnego znaku $\log|v| = Ay \qquad |v| = \exp Ay$

$v(y) = \pm\exp Ay \qquad y' = \pm\exp(Ay) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\exp(Ay) \qquad \exp(-Ay)\,dy = \pm dx$

$-\frac{1}{A}\exp(-Ay) = \pm x + C \qquad \to y'(0) = -\frac{1}{2} \qquad y(0)=1$

$-\frac{1}{2} = \pm\exp(A) \Rightarrow A = \log\frac{1}{2} = -\log 2$

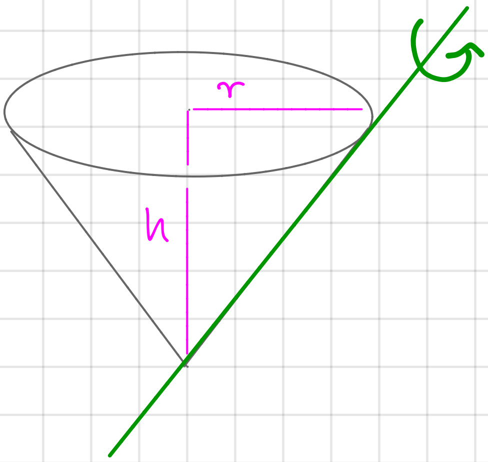
$\exp(Ay) = \pm Ax + E$

$Ay = \log(\pm Ax + E) \qquad y(x) = \frac{1}{A}\log(\pm Ax + E)$

$1 = -\frac{1}{\log 2}\log(\log 2\cdot 0 + E) \qquad 1 = -\frac{1}{\log 2}\log E \qquad \log E = -\log 2 \qquad E = 1/2$

$y(x) = -\frac{1}{\log 2}\log\left((\log 2)x + \frac{1}{2}\right)$

5



Oś obrotu $t \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ tr \\ th \end{bmatrix}$

Wektor prostopadły do osi obrotu, zaczepiony na osi o końcu w $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ to

$\begin{bmatrix} x \\ y-tr \\ z-th \end{bmatrix}$ wektor ten spełnia warunek

$\left(\begin{bmatrix} x \\ y-tr \\ z-th \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ h \end{bmatrix}\right) = 0 = ry - tr^2 + hz - th^2 = ry + hz - t(r^2+h^2)$

$t = \frac{ry+hz}{r^2+h^2}$

Odległość punktu (x,y,z) od osi obrotu (w kwadracie)

$$d^2(x,y,z) = x^2 + (y-tr)^2 + (z-th)^2 = x^2+y^2+z^2 - 2t(yr+zh) + t^2(r^2+h^2) =$$

wstawiamy t

$$= x^2+y^2+z^2 - 2\,\frac{(yr+zh)^2}{r^2+h^2} + \frac{(yr+zh)^2}{r^2+h^2} =$$

$$= x^2+y^2+z^2 - \frac{(yr+zh)^2}{r^2+h^2}$$

$x = r\xi$
$y = r\eta$
$z = h\zeta$
$dx\,dy\,dz = r^2h\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$

$$I = \int_S \rho\, d^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \rho\int_S \left(x^2+y^2+z^2 - \frac{(yr+zh)^2}{r^2+h^2}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= \rho\int_{S_1}\left(r^2(\xi^2+\eta^2)+h^2\zeta^2 - \frac{(\eta r^2+\zeta h^2)^2}{r^2+h^2}\right) r^2h\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

stożek $0 \le \zeta \le 1$, $\xi^2+\eta^2 \le \zeta^2$

$\xi = R\cos\varphi$
$\eta = R\sin\varphi$
$d\xi\,d\eta\,d\zeta = R\,dR\,d\varphi\,d\zeta$

$$= \rho r^2 h \int_{S_2}\left(r^2R^2 + h^2\zeta^2 - R^2\,\frac{(r^2\cos\varphi + h^2\sin\varphi)^2}{r^2+h^2}\right) R\,dR\,d\varphi\,d\zeta =$$

$$= \rho r^2 h\left(r^2\overset{1}{\int_{S_2}} R^3\,dR\,d\varphi\,d\zeta + h^2\overset{2}{\int_{S_2}} \zeta^2 R\,dR\,d\varphi\,d\zeta - \frac{r}{r^2+h^2}\overset{3}{\int_{S_2}} R^3\cos\varphi\,dR\,d\varphi\,d\zeta + \frac{h^2}{r^2+h^2}\overset{4}{\int_{S_2}} R^3\sin\varphi\,dR\,d\varphi\,d\zeta\right)$$

S_2: $\varphi \in [0,2\pi]$
$R \in [0,1]$
$\zeta \in [R,1]$

1: $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dR \int_R^1 d\zeta\, R^3 = 2\pi\int_0^1 R^3\,dR\,(1-R) = 2\pi\int_0^1 (R^3-R^4)\,dR = 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = 2\pi\,\frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

2: $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dR \int_R^1 d\zeta\, \zeta^2 R = 2\pi\int_0^1 R\,dR\,\frac{1}{3}\zeta^3\Big|_R^1 = \frac{2}{3}\pi\int_0^1 R(1-R^3)\,dR = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\pi\,\frac{3}{10} = \frac{2\pi}{10}$$

3 i 4 nie dają wkładu do całki, bo zawierają całkę z sin i cos po okresie

$$I = \rho r^2 h\cdot\left(r^2\frac{\pi}{10} + h^2\frac{2\pi}{10}\right) = \rho r^2 h\cdot\frac{\pi}{10}(r^2+2h^2)$$

obj. stożka: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ jeśli masa to M to $\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

$$I = \frac{M}{\frac{1}{3}\cancel{\pi}\cancel{r^2}\cancel{h}}\,\cancel{r^2}\cancel{h}\,\frac{\cancel{\pi}}{10}(r^2+2h^2) = \frac{3}{10}M(r^2+2h^2)$$